TEMA 4.c: Contraste de Hipótesis

Contents

El objetivo de esta unidad es realizar contrastes de hipótesis para parámetros de poblaciones que siguen una distribución normal a partir de una muestra aleatoria.

4.13 Introducción

Pueden presentarse en la práctica situaciones en las que exista una teoría preconcebida relativa a la característica de la población sometida a estudio, en tal caso uno de los objetivos está en corroborar de forma empírica la hipótesis inicial sobre dicha población. Este tipo de circunstancias son las que nos llevan al estudio de la parcela de la Estadística Inferencial conocida por *Contrastes de Hipótesis.*

Definición 1. *Se denomina* ***Hipótesis Estadística*** *a cualquier conjetura sobre una o varias características de interés de un modelo de probabilidad.*

Por ejemplo, podemos estar interesados en validar las siguientes hipótesis (que se denotarán por H_0 que llamaremos *Hipótesis Nula*):

1. H_0 : La altura media en Ourense no difiere de la del resto de España.
2. H_0 : Los beneficios anuales en bolsa del grupo de eléctricas son iguales al 12%.
3. H_0 : Los beneficios anuales en bolsa del grupo de eléctricas son los mismos que los del grupo de telecomunicaciones.
4. H_0 : El salario de los hombres es igual al de las mujeres.

La hipótesis H_0 a validar va a estar en función de las características de la población. En concreto, las hipótesis nulas para los ejemplos anteriores se pueden escribir como:

1. $H_0 : \mu = 1,68$ (en m.).
2. $H_0 : \mu = 12$ (en %).
3. $H_0 : \mu_X = \mu_Y$.
4. $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$.

Para validar estadísticamente o no estas hipótesis se usa una muestra de la población de interés. La realización de un contraste implica la existencia de dos hipótesis, que denominaremos hipótesis nula (H_0), que es la que se contrasta, e hipótesis alternativa (H_1), que pretendemos contrastar con la hipótesis nula. La hipótesis nula H_0 se considerará cierta si en la muestra recogida no existe una fuerte evidencia en contra. Si a partir de la muestra se decide que la hipótesis nula H_0 es falsa, entonces se acepta como cierta la hipótesis alternativa H_1 que puede ser unilateral o bilateral como se muestra a continuación con los ejemplos anteriores:

1. H_1 : La altura media en Ourense difiere de la del resto de España $\mu \neq 1,68$ (bilateral).
2. H_1 : Los beneficios anuales en bolsa del grupo de eléctricas son inferiores al 12% $\mu < 12$ (unilateral).
3. H_1 : Los beneficios anuales en bolsa del grupo de eléctricas son inferiores a los del grupo de telecomunicaciones $\mu_X < \mu_Y$ (unilateral).
4. H_1 : El salario de los hombres es superior al de las mujeres $\mu_X - \mu_Y > 0$ (unilateral).

Realizar un contraste de hipótesis (o validar estadísticamente una hipótesis) consiste en juzgar si cierta propiedad supuesta para la población es compatible con lo observado en una muestra de ella. Para medir esta “compatibilidad” se definen medidas de discrepancia que dan la diferencia entre lo observado (obtenido a partir de la muestra) y la hipótesis. Si esta diferencia es grande y no puede ser atribuible al azar o a la variabilidad de la muestra rechazaremos la hipótesis.

Definición 2. ***Hipótesis paramétrica simple****: Hipótesis que especifica un único valor para cada parámetro poblacional desconocido. Por ejemplo en dos poblaciones Normales con* $\sigma^2 = 150$*, deseamos contrastar si* $\mu_X = \mu_Y$*,*

Definición 3. ***Hipótesis paramétrica compuesta***: *Hipótesis que asigna un conjunto de valores posibles a parámetros poblacionales desconocidos. Por ejemplo en una población Normal con* $\sigma^2 = 150$*, deseamos contrastar si* $2 < \mu < 5$*,*

Definición 4. ***Estadístico de contraste***. *Es el criterio estadístico que permite decidir hasta qué punto los datos están de acuerdo o no con la hipótesis nula. El estadístico de contraste es cualquier función de los datos muestrales y del parámetro especificado por* H_0*, con distribución conocida cuando* H_0 *es cierta.*

Los estadísticos de contraste suelen medir "discrepancias" entre el parámetro y su estimación, por ejemplo:

$$d\left(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; H_0\right) = \left| \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \tag{1}$$

Al conocerse su distribución cuando H_0 es cierta, se puede calcular la probabilidad de que el estadístico supere el valor que ha tomado para una muestra concreta. Si la probabilidad es "grande", no hay razones para sospechar que H_0 sea falsa; si es "pequeña" admite dos interpretaciones:
a) H_0 es cierta, pero el azar ha producido una muestra poco representativa.
b) La hipótesis H_0 realmente no es cierta.
Distinguiremos entre errores del tipo I y II:

	No rechazar H_0	*Rechazar* H_0
H_0 *cierta*	Correcto	Error tipo I
H_0 *falsa*	Error tipo II	Correcto

Definición 5. *A la probabilidad de cometer un error tipo I se le denomina* ***nivel de significación*** *del contraste y se denota por* α $(0 < \alpha < 1)$*:*

$$\alpha = P\left(\text{error tipo I}\right) = P\left(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta}\right)$$

y por tanto la probabilidad de aceptar H_0 *cuando es cierta es* $1 - \alpha$*.*

Definición 6. *A la probabilidad de cometer un error tipo II se le denota por* β $(0 < \beta < 1)$*:*

$$\beta = P\left(\text{error tipo II}\right) = P\left(\text{aceptar } H_0 / H_0 \text{ falsa}\right)$$

y por tanto la probabilidad de rechazar H_0 *cuando es falsa es* $1 - \beta$*, a esta cantidad se le llama Potencia del contraste.*

Lo ideal sería que las probabilidades de los dos tipos de error fuesen lo más pequeñas posibles, pero esto no es posible, pues fijado un tamaño muestral n, si disminuimos la probabilidad de un error entonces aumenta la probabilidad de cometer el otro error. En la práctica se pueden seguir los siguientes **criterios de error:**

1. *Criterio 1:* Que únicamente se pretenda controlar el error de tipo I, cuando sólo se rechaza H_0 si la evidencia en su contra es muy importante, y no importa cometer el error tipo II.

2. *Criterio 2*: Que la decisión garantice probabilidades para que ambos errores queden fijados de antemano. Fijar sólo α es inadecuado cuando el error tipo II resulte tanto o más grave que un error tipo I.

La metodología del *criterio 1*, la que seguiremos a continuación, es fijar α (habitualmente $\alpha = \{0.1, 0.05, 0.01\}$), es decir, se decide de antemano la probabilidad máxima (de error) que se está dispuesto a cometer de rechazar H_0 cuando es cierta. Posteriormente, a través de una regla, se decide si los datos tienen suficiente evidencia como para rechazar la hipótesis nula H_0 (en favor de la alternativa H_1). Si no es así, se mantiene la hipótesis nula como cierta.

Esta metodología es conservadora en el sentido de que si no se tiene mucha evidencia en contra de la hipótesis nula entonces se tiende a aceptarla.

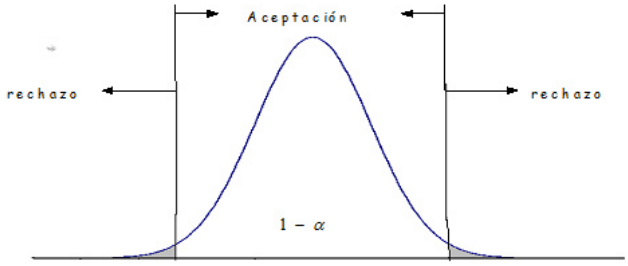
Ejemplo 1. *Un juez tiene que decidir si una persona va a la cárcel o no. En este caso se pueden cometer dos tipos de errores: ingresar a la persona en la cárcel cuando es inocente o dejarla en libertad siendo realmente culpable. La postura del juez es dejar en libertad a la persona si no tiene suficientes evidencias de que sea culpable, por tanto las hipótesis del juez serían:*

$$H_0: \text{ la persona es inocente}$$
$$H_1: \text{ la persona es culpable}$$

y como el juez fija el nivel de significación, por ejemplo $\alpha = 0.01$*, entonces la probabilidad de cometer un error de tipo I (rechazar* H_0 *cuando es cierta), es decir, de ingresar a la persona en la cárcel siendo inocente es como máximo del 1%. De modo que si la hipótesis nula* H_0 *es rechazada es porque los datos aportan suficiente evidencia de que* H_0 *es falsa.*

4.13.1 Metodología

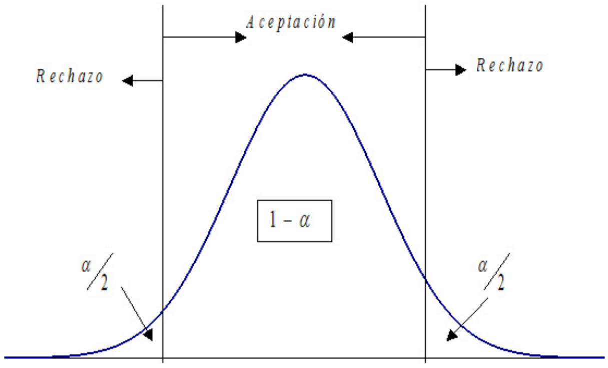
Al fijar un nivel de significación α[1],se obtiene implícitamente una división en dos regiones del conjunto de posibles valores (la distribución del contraste) del estadístico de contraste, una de probabilidad α (bajo H_0) que se conoce como **región de rechazo** o **región crítica**, y otra con probabilidad $1-\alpha$ (bajo H_0) conocida como **región de aceptación**. Si el valor del estadístico cae en la región de aceptación, es decir, la función de discrepancia toma valores próximos a cero, no existen razones suficientes para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación α, y el contraste se dice estadísticamente no significativo. En caso contrario, valores distantes del cero, los datos no son compatibles con H_0 y la rechazamos. Entonces se dice que el contraste es estadísticamente significativo rechazándose la hipótesis nula H_0..



4.13.2 Construcción de las regiones de Aceptación-Rechazo

Las regiones de aceptación-rechazo dependen de la hipótesis alternativa, H_1:

a) $H_1 : \theta \neq \theta_0$. La región de rechazo la forman las dos colas de la distribución del estadístico bajo H_0, ambas con la misma probabilidad $\alpha/2$. En esta situación se construyen I.C. Bilateral de colas iguales.



Definición 7. *Sea D un estadístico de contraste, función de discrepancia, y $\widehat{d}$ el valor observado para una muestra determinada $(x_1, \ldots x_n)$ bajo H_0, es decir, $\widehat{d} = d(x_1, \ldots x_n; H_0)$. Se denomina **valor crítico** o **p-valor** al nivel de significación crítico que verifica $\alpha \in (0,1)$:*
Si p_valor $\geq \alpha \rightarrow$ se acepta la hipótesis nula, y
si p_valor $< \alpha \rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula.

$$p - valor := P\left(D \geq \hat{d} \middle| H_0\right)$$

El p-valor sólo puede calcularse cuando la muestra está tomada, y es distinto para cada una de ellas.

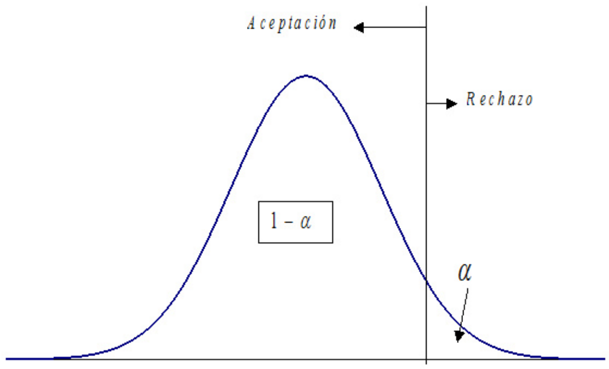
Calculo del p-valor:

a) $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Contraste bilateral y tenemos que considerar dos colas:

$$\text{D. simétrica: } p - valor = P\left(D \leq -\left|\hat{d}\right|\right) + P\left(D \geq \left|\hat{d}\right|\right) = 2 * P\left(D \geq \left|\hat{d}\right|\right)$$
$$\text{D. no simétrica: } p - valor = 2 * \min\left\{P\left(D \leq \hat{d}\right), P\left(D \geq \hat{d}\right)\right\}.$$

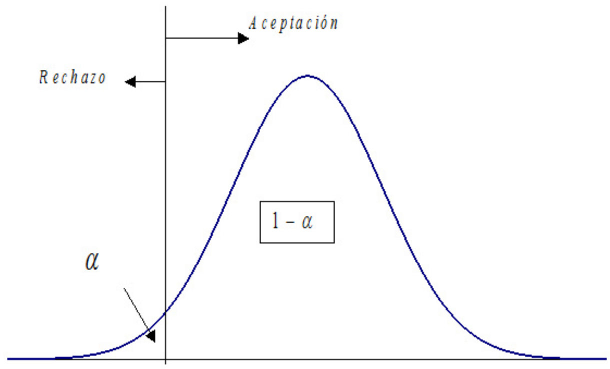
[1]Hay que tener en cuenta que (1.1) es una v.a. ya que engloba a la muestra.

b) $H_1 : \theta > \theta_0$. I.C. Unilateral por la derecha



Región de Aceptación $(-\infty, z_{1-\alpha})$

c) $H_1 : \theta < \theta_0$. I.C. Unilateral por la Izquierda



Región de Aceptación $(z_\alpha, +\infty)$

b) $H_1 : \theta > \theta_0$. Unilateral por la derecha y tenemos que considerar una cola

$$p - valor = P\left(D \geq \hat{d} \middle| H_0\right).$$

c) $H_1 : \theta < \theta_0$. Unilateral por la Izquierda

$$p - valor = P\left(D \leq \hat{d} \middle| H_0\right).$$

Observación 1. *Un p-valor grande no muestra evidencia fuerte en contra de H_0. Puede ocurrir por dos razones: (i) H_0 es cierta o H_0 es falsa y el test tiene una potencia baja.*

Observación 2. *Escala de habitual en la interpretación del p-valor:*

p-valor	*evidencia*
< 0.01	*evidencia muy fuerte en contra de H_0*
$0.01 - 0.05$	*fuerte evidencia en contra de H_0*
$0.05 - 0.10$	*evidencia debil en contra de H_0*
> 0.10	*nula o poca evidencia en contra de H_0*

4.13.3 Potencia de un contraste

Definición 8. *Función que asigna a cada posible valor del parámetro θ la probabilidad de rechazar H_0 cuando el verdadero valor es θ.*

$$\begin{aligned} \pi : \Theta &\longrightarrow [0,1] \\ \theta &\longrightarrow \pi(\theta) = P\left(rechazar\ H_0/\theta\right) \end{aligned}$$

Para una tamaño muestral n y un nivel de significación α, la probabilidad de error tipo II depende únicamente del estadístico D y de θ.

$$\forall \theta \in H_1,\ \pi(\theta) = 1 - \beta(\theta) \qquad \begin{array}{l} \forall \theta \in H_0,\ \pi(\theta) \leq \alpha \\ \text{Si } H_0 : \theta = \theta_0,\ \pi(\theta_0) = \alpha \end{array}$$

A las gráficas de la función de potencia se les denomina **curva de potencia.** Pueden interpretarse como la sensibilidad o capacidad para detectar la hipótesis alternativa. Fijado el nivel de significación α, un contraste con función de potencia $\pi_1(\theta)$ se dice más potente que otro con función de potencia $\pi_2(\theta)$ para contrastar H_0 si:

$$\pi_1(\theta) \geq \pi_2(\theta) \quad \forall \theta \in H_1$$

4.13.4 Procedimiento general para la realización de un contraste de hipótesis

El procedimiento que abajo se describe, podrá aplicarse para constrastar cualquier tipo de hipótesis (paramétrica o no paramétrica, unilateral o bilateral).

Etapas para la realización de un contraste de hipótesis:

1. **Determinación de las hipótesis nula y alternativa.** En esta primera etapa deberán especificarse las hipótesis nula (H_0) y alternativa (H_1) del contraste. Dichas hipótesis determinarán el tipo de contraste (bilateral o unilateral, simple o compuesta) a realizar.

2. **Fijación de los errores de tipo I y de tipo II.** La segunda etapa de este procedimiento general consiste en la fijación de los valores α y β de las probabilidades de los errores de tipo **I** y tipo **II**, respectivamente.

3. **Determinación del tamaño muestral.** Una vez fijados los valores de α y β, se puede determinar el tamaño muestral necesario para garantizar dichas probabilidades de error.

   Es común omitir esta etapa, en cuyo caso se dice que el procedimiento corresponde a un *contraste de significación*.

   En lo que sigue, realizaremos contrastes de significación: supondremos que disponemos de una muestra de tamaño adecuado para la realización del contraste y únicamente fijaremos un valor α para el nivel de significación (no nos preocuparemos del error de tipo II).

4. **Elección del estadístico.** Va a ser una variable aleatoria que nos permitirá decidir la aceptación o el rechazo de la hipótesis nula, con la garantíade los errores prefijados. Deberemos conocer su distribución de probabilidad en el supuesto de que la hipótesis nula sea cierta.

5. **Determinación de la región de aceptación.** En función de los valores de α y, en su caso β, fijados en la segunda etapa, así como de las hipótesis nula y alternativa especificadas en la primera etapa, se obtiene un intervalo (finito o infinito) que se denomina *región de aceptación*.

   Una vez evaluado el estadístico para una muestra de tamaño previamente fijado, si el valor de éste pertenece a la región de aceptación se acepta la hipótesis nula. En caso contrario se rechaza.

   El complemento de la región de aceptación se denomina *región de crítica o de rechazo*.

4.13.5 Relación entre Contrastes de Hipótesis e Intervalos de Confianza

Existe una analogía entre los I.C. y los Contrastes de Hipótesis, aunque ambos tienen identidad propia y son complementarios. Dado un contraste

$$\begin{array}{l} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{array}$$

podemos construir el I.C. para θ_0 como el conjunto de hipótesis nulas con las cuales se acepta el test anterior, utilizando el mismo nivel de error. Recíprocamente dado un I.C. para θ_0, todo valor $\theta_1 \in$ I.C. verífica la hipótesis nula $H_0 : \theta = \theta_1$.

Los intervalos que se construyen tienen que ser acordes con las hipótesis nula y alternativa y si se fija un nivel de significación α para el test el nivel de confianza para el intervalo es $1 - \alpha$.

4.14 Contrastes paramétricos de una población normal

Supongamos que la característica X que estudiamos sobre la población sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ y tomamos una muestra $(X_1, \ldots X_n)$ de tamaño n mediante muestreo aleatorio simple. Vamos a ver cuáles son las técnicas para contrastar hipótesis sobre los parámetros que rigen X. Vamos a comenzar haciendo diferentes tipos de contrastes para medias y después sobre las varianzas y desviaciones típicas.

4.14.1 Contrastes para la media de una población normal con varianza conocida

a) Contraste bilateral

Suponemos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ donde σ es conocido y queremos contrastar si es posible que μ (desconocida) sea en realidad cierto valor fijado μ_0. El test se escribe entonces:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

La técnica para hacer el contraste consiste en suponer que H_0 es cierta, y averiguar con esta hipótesis quién es la distribución del estadístico del contraste, que en este caso consideramos

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

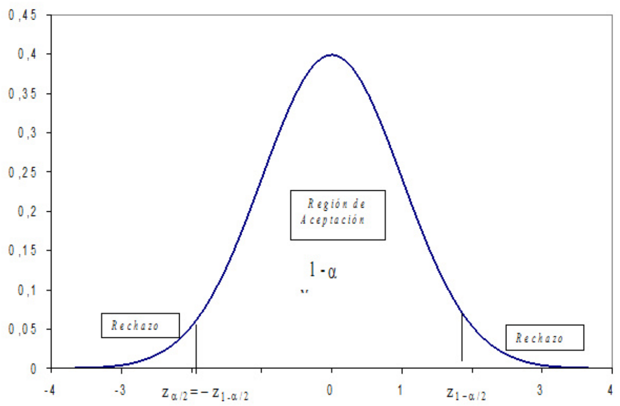
Si al obtener una muestra concreta, una vez fijado el nivel de significación α, se tiene que el valor del estadístico es significativamente grande o pequeño, se debe rechazar H_0 (en favor de la hipótesis alternativa H_1), es decir

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha/2} \text{ o bien } z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_{1-\alpha/2}$$

que es lo mismo que

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } |z| = \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha/2}$$

tal como viene dado en la siguiente figura:



Ejemplo 2. ***Se desea contrastar si la altura media en Ourense no difiere de la del resto de España con un nivel de significación del 5%, sabiendo que la altura media en España es 1,68 metros y la varianza es $\sigma^2 = 0,05^2$ a partir de la siguiente muestra de 10 personas***

$$\overrightarrow{X} = \{1.80, 1.66, 1.68, 1.75, 1.72, 1.67, 1.59, 1.73, 1.69, 1.75\}$$

El contraste es

$$H_0 : \mu = 1.68$$
$$H_1 : \mu \neq 1.68$$

Con la muestra anterior, el valor del estadístico de contraste es

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1,704 - 1,68}{\frac{0,05}{\sqrt{10}}} = 1,5179$$

Este valor está dentro de la región de aceptación R.A. $= (-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}) = (-1.96, 1.96)$ *para el nivel de significación* $\alpha = 0.05$, *por lo tanto los datos no muestran suficiente evidencia para rechazar* H_0 *y decidimos aceptar que la altura media en Ourense es la misma que la del resto de España.*

$$P-valor = P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \geq d\left(x_1, \ldots x_n\right) \middle| H_0\right) = P\left(\left|N\left(0,1\right)\right| \geq 1.5179\right) =$$

$2 * P\left(N\left(0,1\right) \geq 1.5179\right) = 2 * 0.0645 = 0.129$

Como $P-valor > \alpha$ *entonces no podemos rechazar* H_0.

b) Contraste unilateral

Suponemos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ donde σ es conocido y queremos contrastar si es posible que μ (desconocida) sea en realidad cierto valor fijado μ_0 frente a que realmente sea mayor (análogamente menor). El test se escribe entonces:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

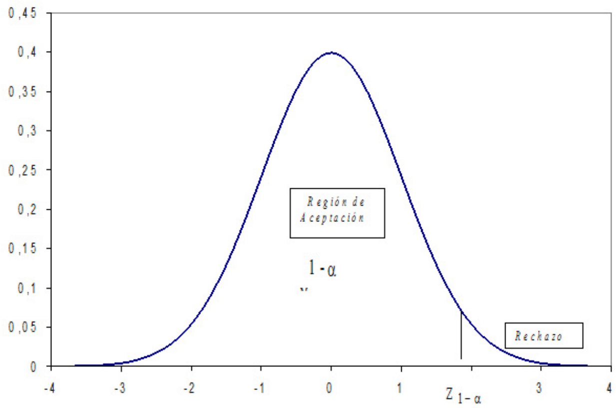
El estadístico del contraste en este caso es también

$$z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Si al obtener una muestra concreta, una vez fijado el nivel de significación α, se tiene que el valor del estadístico es significativamente grande, se debe rechazar H_0 (en favor de la hipótesis alternativa H_1), es decir

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha}$$

tal como viene dado en la siguiente figura:



Ejemplo 3. ***Continuando con el ejemplo anterior, contrastar si la altura media en Ourense no difiere de la media española o por el contrario es mayor con un nivel de significación del 1%.***

El valor del estadístico sigue siendo $z = 1,5179$, *que está en la región de aceptación* $(R.A. = (-\infty, z_{1-\alpha}) = (-\infty, 2,3263))$ *para un nivel de significación* $\alpha = 0,01$, *de modo que el valor de z no es significativamente grande y los datos no muestran de nuevo suficiente evidencia para rechazar* H_0.

$$P-valor = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq d\left(x_1, \ldots x_n\right) \middle| H_0\right) = P\left(N\left(0,1\right) \geq 1.5179\right) = 0.0645$$

Como $P-valor > \alpha$ *entonces no podemos rechazar* H_0.

Tabla resumen:

Contraste	H. nula	H. alternativa	R. de aceptación
Bilateral	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$(-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2})$
Unilateral izda.	$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	$(-z_{1-\alpha}, \infty)$
Unilateral dcha.	$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$(-\infty, z_{1-\alpha})$

4.14.2 Contrastes para la media de una población normal con varianza desconocida

Suponemos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ donde σ es desconocido. Si queremos realizar el contraste bilateral, lo que se contrasta si es posible que μ (desconocida) sea en realidad cierto valor fijado μ_0. El test se escribe entonces:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

El estadístico del contraste que consideraremos en este caso es

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}} \underset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

Si al obtener una muestra concreta, una vez fijado el nivel de significación α, se tiene que el valor del estadístico es significativamente grande o pequeño, se debe rechazar H_0 (en favor de la hipótesis alternativa H_1), es decir

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}} > t_{n-1,1-\alpha/2} \text{ o bien } t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}} < -t_{n-1,1-\alpha/2}$$

Si se desea realizar el contraste unilateral

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu > \mu_0 \end{aligned}$$

una vez fijado el nivel de significación α, se rechaza la hipótesis nula H_0 si el valor del estadístico es significativamente grande, es decir

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}} > t_{n-1,1-\alpha}$$

Ejemplo 4. ***Con la muestra del ejemplo anterior, si no se conoce el valor de la varianza σ^2, contrastar con un nivel de confianza del 95%, contrastar si la altura media en Ourense no difiere de la media española.***

Se trata de un contraste bilateral

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

Se calcula $\widehat{s}^2 = \frac{n}{n-1}s^2$ *donde* $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 = 2,90674 - 1,704^2 = 0,003124$, *de modo que* $\widehat{s}^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{10}{9}0,003124 = 0,00347\widehat{1}$ *y por último* $\widehat{s} = 0,05891$, *de forma que el estadístico de contraste vale*

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}} = \frac{1,704 - 1,68}{\frac{0,05891}{\sqrt{10}}} = 1,2882$$

De nuevo está en la región de aceptación $R.A. = (-t_{n-1,1-\alpha/2}, t_{n-1,1-\alpha/2}) = (-2.262, 2.262)$. *Por lo tanto, los datos no muestran suficiente evidencia para rechazar* H_0 *y decidimos aceptar que la altura media en Ourense es la misma que la del resto de España.*

$$P - valor = P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}}\right| \geq d(x_1, \ldots x_n) \middle| H_0\right) = P(|t_9| \geq 1.2882) =$$

$2 * P(t_9 \geq 1.2882) = 2 * 0.446 = 0.892$

Como $P - valor > \alpha$ *entonces no podemos rechazar* H_0.

Tabla resumen:

Contraste	**H. nula**	**H. alternativa**	**R. de aceptación**
Bilateral	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$(-t_{1-\alpha/2,n-1}, t_{1-\alpha/2,n-1})$
Unilateral izda.	$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	$(-t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
Unilateral dcha.	$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$(-\infty, t_{n-1,1-\alpha})$

4.14.3 Contrastes para la varianza de una población normal

Supongamos ahora que se desea realizar el *contraste bilateral*

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Se sabe que, si H_0 es cierta,

$$\frac{(n-1)\,\widehat{S}^2}{\sigma_0^2} \underset{H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}$$

Por tanto, una vez fijado el nivel de significación α, se rechaza la hipótesis nula H_0 si el estadístico anterior es significativamente grande o pequeño, es decir,

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } \chi^2 = \frac{(n-1)\,\widehat{S}^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \text{ ó } \chi^2 = \frac{(n-1)\,\widehat{S}^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\alpha/2}$$

Si queremos hacer el *contraste unilateral*

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

una vez fijado α, se rechaza H_0 si el valor del estadístico es significativamente pequeño, es decir

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } \chi^2 = \frac{(n-1)\,\widehat{S}^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\alpha}$$

Tabla resumen

Contraste	H. nula	H. alternativa	R. de aceptación
Bilateral	$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1:\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$(\chi^2_{n-1,\alpha/2}, \chi^2_{n-1,1-\alpha/2})$
Unilateral izda.	$H_0:\ \sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$H_1:\ \sigma^2 < \sigma_0^2$	$(\chi^2_{n-1,\alpha}, +\infty)$
Unilateral dcha.	$H_0:\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$H_1:\ \sigma^2 > \sigma_0^2$	$(0, \chi^2_{n-1,1-\alpha})$

Corolario 1. *Si la media μ de la distribución Normal es conocida, entonces cambia el estadístico de contraste a $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \underset{H_0}{\sim} \chi^2_n$ modificándose los grados de libertad de la distribución χ^2. Todo el procedimiento anterior se repetiría igual con estas dos modificaciones.*

Ejemplo 5. ***En el ejemplo anterior, contrastar que la variabilidad de las alturas de Ourense es la misma que la variabilidad en España frente a que es distinta con un nivel de significación del 5%.***

Las hipótesis son

$$H_0 : \sigma^2 = 0.05^2$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq 0.05^2$$

Habíamos obtenido que $\widehat{s}^2 = 0{,}05891^2 = 0{,}00347\overset{\frown}{1}$, *de modo que el estadístico de contraste vale*

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\,\widehat{s}^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \cdot 0{,}00347\overset{\frown}{1}}{0.05^2} = 12{,}4956$$

que pertenece a la región de aceptación $R.A. = \left(\chi^2_{n-1,\alpha/2}, \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = (2.70, 19.023)$, *para un nivel del 5%, por lo tanto decidimos aceptar que la variabilidad de las alturas en Ourense es la misma que la del resto de España.*

$P-valor = 2 * \min\left\{P\left(\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\sigma^2} \leq d\,(x_1,\ldots x_n)\Big|\, H_0\right), P\left(\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\sigma^2} \geq d\,(x_1,\ldots x_n)\Big|\, H_0\right)\right\} =$
2*min $\left\{P\left(\chi^2_9 \leq 12{,}4956\right), P\left(\chi^2_9 \geq 12{,}4956\right)\right\}$ =2*min $\{0.8132, 0.1868\} = 0.3736$.

Como $P-valor > \alpha$ *entonces no podemos rechazar* H_0.

4.15 Contrastes paramétricos de dos poblaciones normales

Como se vio en el tema de "Intervalos de Confianza", las muestras se pueden obtener por dos procedimientos: datos apareados o muestras independientes. Independientemente del método escogido, el interés estará centrado en hacer contrastes sobre la diferencia de las dos medias poblacionales y el cociente de las varianzas poblacionales.

4.15.1 Contrastes para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con muestras independientes

Varianzas conocidas

Si se desea realizar el *contraste bilateral*

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0 \\ H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq d_0 \end{array}$$

sabemos que, si H_0 es cierta, y las varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 son conocidas

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}} \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Por tanto, una vez fijado el nivel de significación α, se rechaza la hipótesis nula H_0 si el valor del estadístico es significativamente grande o pequeño

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}} > z_{1-\alpha/2} \text{ ó } Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}} < z_{\alpha/2}$$

Si se desea realizar el *contraste unilateral*

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0 \\ H_1 : \mu_X - \mu_Y > d_0 \end{array}$$

una vez fijado el nivel de significación α, se rechaza la hipótesis nula H_0 si el valor del estadístico es significativamente grande

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n}}} > z_{1-\alpha}$$

Tabla resumen:

Contraste	H. nula	H. alternativa	R. de aceptación
Bilateral	$H_0: \mu_X - \mu_Y = d_0$	$H_1: \mu_X - \mu_Y \neq d_0$	$(-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2})$
Unilateral izda.	$H_0: \mu_X - \mu_Y \geq d_0$	$H_1: \mu_X - \mu_Y < d_0$	$(-z_{1-\alpha}, \infty)$
Unilateral dcha.	$H_0: \mu_X - \mu_Y \leq d_0$	$H_1: \mu_X - \mu_Y > d_0$	$(-\infty, z_{1-\alpha})$

Varianzas desconocidas pero iguales

En este caso, si las varianzas son desconocidas pero iguales, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, se estima σ^2 por $\widehat{S}^2$,

$$\widehat{S}^2 = \frac{(n-1)\,\widehat{s}_X^2 + (m-1)\,\widehat{s}_Y^2}{n+m-2}$$

de modo que el estadístico de contraste será

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\widehat{S}\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}} \underset{H_0}{\sim} t_{n+m-2}$$

Por tanto, una vez fijado el nivel de significación α, rechazaremos la hipótesis nula en favor de la alternativa en un *contraste bilateral* si el valor del estadístico es significativamente grande o pequeño

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } T = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-d_0}{\widehat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} > t_{n+m-2,1-\alpha/2} \text{ ó } T = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-d_0}{\widehat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} < t_{n+m-2,\alpha/2}$$

En el caso de tratarse de un *contraste unilateral* de la forma

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0$$
$$H_1 : \mu_X - \mu_Y > d_0$$

se rechaza H_0 si el estadístico es significativamente grande

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } T = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-d_0}{\widehat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} > t_{n+m-2,1-\alpha}$$

y si es de la forma

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0$$
$$H_1 : \mu_X - \mu_Y < d_0$$

se rechaza H_0 si el estadístico es significativamente pequeño

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } T = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-d_0}{\widehat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} < t_{n+m-2,\alpha}$$

Tabla resumen:

Contraste	H. nula	H. alternativa	R. de aceptación
Bilateral	$H_0 :\ \mu_X - \mu_Y = d_0$	$H_1 :\ \mu_X - \mu_Y \neq d_0$	$(-t_{n+m-2,1-\alpha/2}, t_{n+m-2,1-\alpha/2})$
Unilateral izda.	$H_0 :\ \mu_X - \mu_Y \geq d_0$	$H_1 :\ \mu_X - \mu_Y < d_0$	$(-t_{n+m-2,1-\alpha}, \infty)$
Unilateral dcha.	$H_0 :\ \mu_X - \mu_Y \leq d_0$	$H_1 :\ \mu_X - \mu_Y > d_0$	$(-\infty, t_{n+m-2,1-\alpha})$

Ejemplo 6. ***Se desea contrastar con un nivel de confianza del 95% si el número medio de cambios de empleo de los empresarios es menoro igual que el de los directores de corporaciones, suponiendo que las varianzas de ambas poblaciones son desconocidas pero iguales. Para llevar a cabo este estudio, se selecciona una muestra de 125 empresarios, siendo el número medio de cambios de empleo*** $\overline{x} = 1{,}91$ ***y la cuasi-desviación típica*** $\widehat{s}_1 = 1.32$***. Análogamente, se seleccionó una muestra independiente de 86 directores de corporaciones, obteniéndose*** $\overline{y} = 0{,}21$ ***y*** $\widehat{s}_2 = 0{,}53$.

El contraste que queremos realizar es

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq 0$$
$$H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0$$

La estimación de la varianza de los empresarios y los directores de corporaciones es

$$\widehat{S}^2 = \frac{(n_X-1)\,\widehat{s}_1^2 + (n_Y-1)\,\widehat{s}_2^2}{n+m-2} = \frac{124\cdot 1.32^2 + 85\cdot 0.53^2}{209} = 1.1480$$

y el valor del estadístico es

$$t = \frac{(\overline{x}-\overline{y})-d_0}{\widehat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} = \frac{(1.91-0.21)-0}{\sqrt{1.1480}\sqrt{\frac{1}{125}+\frac{1}{86}}} = 11.3251$$

por tanto, se puede rechazar la hipótesis nula con casi cualquier nivel de significación, puesto que el valor del estadístico es significativamente muy grande.

$$P-valor = P\left(\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-d_0}{\widehat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \geq d\,(x_1,\ldots x_n)\middle|\, H_0\right) = P\left(t_{209} \geq 11{,}3251\right) = 8.51E-24$$

Como $P-valor < \alpha$ *entonces rechazar* H_0.

Varianzas desconocidas y desiguales

En esta situación si las varianzas son desconocidas y desiguales $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, se estima σ^2 por

$$\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2}{n}+\frac{\hat{S}_Y^2}{m}}$$

con $\hat{S}_X^2$, $\hat{S}_Y^2$ las cuasivarianzas muestrales de cada población.

a) **Tamaños muestrales grandes ($n, m \geq 30$)**

En este caso el estadístico de contraste es

$$T=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-d_0}{\sqrt{\frac{\widehat{S}_X^2}{n}+\frac{\widehat{S}_Y^2}{m}}} \underset{A\sin}{\sim} N\left(0,1\right)$$

que tiene una distribución aproximadamente normal $N\left(0,1\right)$.

b) **Tamaños muestrales pequeños ($n, m < 30$)**

En este caso la aproximación normal no es nada precisa. La solución más usada habitualmente es la aproximación debida a Welch, según la cual el estadístico anterior sigue una distribución t de Student con $g = n + m - 2 - \delta$ grados de libertad, con δ el entero más próximo a

$$\Delta=\frac{\left[(m-1)\frac{\widehat{S}_X^2}{n}-(n-1)\frac{\widehat{S}_Y^2}{m}\right]^2}{(m-1)\left(\frac{\widehat{S}_X^2}{n}\right)^2+(n-1)\left(\frac{\widehat{S}_Y^2}{m}\right)^2}$$

Se comprueba que $0 \leq \delta \leq \max\left(n-1, m-1\right)$

Por tanto, una vez fijado el nivel de significación α, rechazaremos la hipótesis nula en favor de la alternativa en un *contraste bilateral* si el valor del estadístico es significativamente grande o pequeño (caso b)

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } T=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-d_0}{\sqrt{\frac{\widehat{S}_X^2}{n}+\frac{\widehat{S}_Y^2}{m}}} > t_{n+m-2-\delta,1-\alpha/2} \text{ ó } T=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-d_0}{\sqrt{\frac{\widehat{S}_X^2}{n}+\frac{\widehat{S}_Y^2}{m}}} < t_{n+m-2-\delta,\alpha/2}$$

En el caso de tratarse de un *contraste unilateral* de la forma

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0 \\ H_1 : \mu_X - \mu_Y > d_0 \end{array}$$

se rechaza H_0 si el estadístico es significativamente grande

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } T=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-d_0}{\sqrt{\frac{\widehat{S}_X^2}{n}+\frac{\widehat{S}_Y^2}{m}}} > t_{n+m-2-\delta,1-\alpha}$$

y si es de la forma

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0 \\ H_1 : \mu_X - \mu_Y < d_0 \end{array}$$

se rechaza H_0 si el estadístico es significativamente pequeño

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } T=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-d_0}{\sqrt{\frac{\widehat{S}_X^2}{n}+\frac{\widehat{S}_Y^2}{m}}} < t_{n+m-2-\delta,\alpha}$$

Tabla resumen:

Contraste	H. nula	H. alternativa	R. de aceptación
Bilateral	$H_0: \mu_X - \mu_Y = d_0$	$H_1: \mu_X - \mu_Y \neq d_0$	$\left(-t_{n+m-2-\delta,1-\alpha/2}, t_{n+m-2-\delta,1-\alpha/2}\right)$
Unilateral izda.	$H_0: \mu_X - \mu_Y \geq d_0$	$H_1: \mu_X - \mu_Y < d_0$	$\left(-t_{n+m-2-\delta,1-\alpha}, \infty\right)$
Unilateral dcha.	$H_0: \mu_X - \mu_Y \leq d_0$	$H_1: \mu_X - \mu_Y > d_0$	$\left(-\infty, t_{n+m-2-\delta,1-\alpha}\right)$

4.15.2 Contrastes para la diferencia de medias de dos poblaciones normales con datos apareados

Si queremos realizar el *contraste bilateral*

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = d_0$$
$$H_1: \mu_X - \mu_Y \neq d_0$$

sabemos que, si H_0 es cierta y $D = X - Y$ sigue una distribución $N\left(\mu_D = \mu_X - \mu_Y, \sigma_D\right)$, entonces

$$\frac{\overline{D} - d_0}{\frac{\widehat{S}_D}{\sqrt{n}}} \underset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

donde $\widehat{S}_D$ es la cuasi-desviación típica muestral de los datos $D_i = X_i - Y_i$. Por tanto, una vez fijado el nivel de significación α, rechazamos la hipótesis nula H_0 si el valor del estadístico de contraste es significativamente grande o pequeño, es decir,

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } T = \frac{\overline{D} - d_0}{\frac{\widehat{S}_D}{\sqrt{n}}} > t_{n-1,1-\alpha/2} \text{ ó } T = \frac{\overline{D} - d_0}{\frac{\widehat{S}_D}{\sqrt{n}}} < t_{n-1,\alpha/2}$$

Si queremos realizar el *contraste unilateral*

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = d_0$$
$$H_1: \mu_X - \mu_Y > d_0$$

una vez fijado el nivel de significación α, rechazamos la hipótesis nula H_0 si el valor del estadístico de contraste es significativamente grande, es decir,

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } T = \frac{\overline{D} - d_0}{\frac{\widehat{S}_D}{\sqrt{n}}} > t_{n-1,1-\alpha}$$

Tabla resumen:

Contraste	H. nula	H. alternativa	R. de aceptación
Bilateral	$H_0: \mu_X - \mu_Y = d_0$	$H_1: \mu_X - \mu_Y \neq d_0$	$\left(-t_{n-1,1-\alpha/2}, t_{n-1,1-\alpha/2}\right)$
Unilateral izda.	$H_0: \mu_X - \mu_Y \geq d_0$	$H_1: \mu_X - \mu_Y < d_0$	$\left(-t_{n-1,1-\alpha}, \infty\right)$
Unilateral dcha.	$H_0: \mu_X - \mu_Y \leq d_0$	$H_1: \mu_X - \mu_Y > d_0$	$\left(-\infty, t_{n-1,1-\alpha}\right)$

Ejemplo 7. ***Se desea contrastar con un nivel de significación del 5%si la estatura de una persona disminuye a lo largo del día. Para ello se seleccionaron al azar 10 individuos (mujeres de 25 años) y se les midió su estatura (en cm.) al levantarse, X_i, y antes de acostarse Y_i, obteniéndose los siguientes datos:***

x_i	169.7	168.5	165.9	177.8	179.6	168.9	169.2	1.67.9	181.8	163.3
y_i	168.2	166.4	166.7	177.2	177.9	168.0	169.5	166.7	182.5	161.1

El contraste a realizar es

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0 \text{ la estatura es la misma a lo largo del día}$$
$$H_1: \mu_X - \mu_Y > 0 \text{ la estatura disminuye a lo largo del día}$$

Primero calculamos las diferencias d_i :

d_i	1.5	2.1	-0.8	0.6	1.7	0.9	-0.3	1.2	-0.7	2.2

de forma que

$$\overline{d} = 0.84$$
$$\widehat{s}_D^2 = 1.1138^2$$

El valor del estadístico es, por tanto,

$$t = \frac{\overline{d} - d_0}{\frac{\widehat{s}_D}{\sqrt{n}}} = \frac{0.84 - 0}{\frac{1.1138}{10}} = 7.5417$$

Rechazamos la hipótesis nula con un nivel del 5%, ya que el valor del estadístico pertenece a la región de rechazo $R.A. = (-\infty, t_{n-1,1-\alpha}) = (-\infty, 1.8331)$ *y se puede concluir que existe una disminución significativa de la estatura a lo largo del día.*

$$P - valor = P\left(\frac{\overline{D}-d_0}{\frac{\widehat{S}_D}{\sqrt{n}}} \geq d(x_1, \ldots x_n) \middle| H_0\right) = P(t_9 \geq 7.5417) = 1.767 \times 10^{-5} \text{ (usando la función de R: 1-pt(7.5417,df=9))}$$

y usando el valor más próximo de la tabla de la distribución t-student: $P(t_9 \geq 7.5417) < P(t_9 \geq 4.781) = 1 - P(t_9 < 4.781) = 1 - 0.9995 = 0.0005$

Como $P - valor < \alpha$ *entonces podemos rechazar* H_0.

4.15.3 Contrastes para el cociente de varianzas de dos poblaciones normales basado en muestras independientes

Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ dos muestras aleatorias simples independientes de las variables $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$ respectivamente. Se está interesado en realizar el *contraste bilateral*

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$
$$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Se sabe que el cociente

$$\frac{\widehat{S}_X^2/\sigma_X^2}{\widehat{S}_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n-1,m-1}$$

de modo que bajo la hipótesis nula H_0, el estadístico de contraste es

$$\frac{\widehat{S}_X^2}{\widehat{S}_Y^2} \underset{H_0}{\sim} F_{n-1,m-1}$$

Una vez fijado el nivel de significación α, se rechaza la hipótesis nula H_0 si el valor del estadístico anterior es significativamente grande o pequeño, es decir,

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } F = \frac{\widehat{S}_X^2}{\widehat{S}_Y^2} > F_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \text{ ó } F = \frac{\widehat{S}_X^2}{\widehat{S}_Y^2} < F_{n-1,m-1,\alpha/2}$$

Tabla resumen:

Contraste	H. nula	H. alternativa	R. de aceptación
Bilateral	$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	$(F_{n-1,m-1,\alpha/2}, F_{n-1,m-1,1-\alpha/2})$
Unilateral izda.	$H_0 : \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$	$H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$	$(F_{n-1,m-1,\alpha}, \infty)$
Unilateral dcha.	$H_0 : \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$	$H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$	$(0, F_{n-1,m-1,1-\alpha})$

Ejemplo 8. ***Se desea contrastar con un nivel de significación del 5% si la variabilidad de los precios de alquiler en Madrid,*** X***, es la misma que en Barcelona,*** Y***, a partir de los siguientes datos:***

$$\overline{x} = 82.5, \ \ \overline{y} = 85.4, \ \ \widehat{s}_X^2 = 21.4^2, \ \ \widehat{s}_Y^2 = 24.3^2, \ \ n = 70, \ \ m = 50$$

El contraste a realizar es el siguiente

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$
$$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

El valor del estadístico es

$$F = \frac{\widehat{s}_X^2}{\widehat{s}_Y^2} = \frac{21.4^2}{24.3^2} = 0.7756$$

Puesto que $F_{n-1,m-1,\alpha/2} = F_{69,49,0.025} = 0.5997$ *y* $F_{n-1,m-1,1-\alpha/2} = F_{69,49,0.975} = 1.7072$, *el valor del estadístico pertenece a la región de aceptación, de modo que no se puede rechazar la hipótesis nula y concluimos que las dos ciudades tienen la misma variabilidad en los precios de alquiler.*

$P - valor = 2 * \min \left\{ P\left(\frac{\widehat{s}_X^2}{\widehat{s}_Y^2} \leq d\left(x_1, \ldots x_n\right) \middle| H_0 \right), P\left(\frac{\widehat{s}_X^2}{\widehat{s}_Y^2} \geq d\left(x_1, \ldots x_n\right) \middle| H_0 \right) \right\} =$

2*min $\{P\left(F_{69,49} \leq 0.7756\right), P\left(F_{69,49,0.025} \geq 0.7756\right)\}$ =2*min $\{0.1640, 0.8360\} = 0.3279$.

Como $P - valor > \alpha$ *entonces no podemos rechazar* H_0.

4.16 Contrastes para muestras no normales y grandes.

En esta sección se estudiarán otro tipo de distribuciones y se supondrá que el tamaño de la muestra es suficientemente grande.

4.16.1 Contrastes para una media

Suponemos que X sigue una distribución desconocida (y por lo tanto también que σ es desconocido). Usando el Teorema Central del Limite, obtenemos que podemos aproximar la distribución del estadístico

$$Z = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right)}{\widehat{S}}$$

por la $N(0,1)$, ya que asintóticamente la distribución del estimador es $N(0,1)$.

Si queremos realizar el contraste bilateral, lo que se contrasta si es posible que μ (desconocida) sea en realidad cierto valor fijado μ_0. El test se escribe entonces:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Si al obtener una muestra concreta, una vez fijado el nivel de significación α, se tiene que el valor del estadístico es significativamente grande o pequeño, se debe rechazar H_0 (en favor de la hipótesis alternativa H_1), es decir

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } z = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{x} - \mu_0\right)}{\widehat{s}} > z_{1-\alpha/2} \text{ o bien } z = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{x} - \mu_0\right)}{\widehat{s}} < -z_{1-\alpha/2}$$

Tabla resumen:

Contraste	H. nula	H. alternativa	R. de aceptación
Bilateral	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$(-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2})$
Unilateral izda.	$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$	$(-z_{1-\alpha}, \infty)$
Unilateral dcha.	$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$(-\infty, z_{1-\alpha})$

4.16.2 Contrastes para una proporción

En este apartado se desea contrastar si la proporción p de individuos que verifican una cierta característica es igual a un determinado número p_0 :

$$H_0 : p = p_0$$
$$H_1 : p \neq p_0$$

Se verifica que

$$\frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}} \sim N\left(0,1\right)$$

de modo que bajo la hipótesis nula H_0 se verifica que

$$\frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} \underset{H_0}{\sim} N\,(0,1)$$

Por tanto, una vez fijado el nivel de significación α, se rechaza la hipótesis nula si el valor anterior es significativamente grande o pequeño, es decir,

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } Z = \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} > z_{1-\alpha/2} \ \text{ó}\ Z = \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} < z_{\alpha/2}$$

Tabla resumen:

Contraste	**H. nula**	**H. alternativa**	**R. de aceptación**
Bilateral	$H_0:\ p=p_0$	$H_1:\ p\neq p_0$	$(-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2})$
Unilateral izda.	$H_0:\ p\geq p_0$	$H_1:\ p<p_0$	$(-z_{1-\alpha}, \infty)$
Unilateral dcha.	$H_0:\ p\leq p_0$	$H_1:\ p>p_0$	$(-\infty, z_{1-\alpha})$

4.16.3 Contraste para la diferencia de dos proporciones

Sean $X_1,\ldots,X_n$ e $Y_1,\ldots,Y_m$ dos muestras aleatorias simples independientes de las variables $X \sim Bi\,(1,p_X)$ e $Y \sim Bi\,(1,p_Y)$. El objetivo es contrastar si la proporción p_X de individuos de una población X es igual a la proporción p_Y de individuos de otra población Y que verifican cierta característica. El contraste bilateral sería el siguiente:

$$H_0: p_X - p_Y = 0$$
$$H_1: p_X - p_Y \neq 0$$

Sabemos que si H_0 es cierta,

$$\frac{\widehat{p}_X-\widehat{p}_Y}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}\sqrt{\widehat{p}_0\,(1-\widehat{p}_0)}} \underset{H_0}{\sim} N\,(0,1)$$

siendo

$$\widehat{p}_0 = \frac{n_X\widehat{p}_X + n_Y\widehat{p}_Y}{n+m}$$

Una vez fijado el nivel de significación α, se rechaza la hipótesis nula si el valor del estadístico de contraste es significativamente grande o pequeño, es decir,

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } |z| = \frac{|\widehat{p}_X-\widehat{p}_Y|}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}\sqrt{\widehat{p}_0\,(1-\widehat{p}_0)}} > z_{1-\alpha/2}$$

Tabla resumen:

Contraste	**H. nula**	**H. alternativa**	**R. de aceptación**
Bilateral	$H_0:\ p_X=p_Y$	$H_1:\ p_X\neq p_Y$	$(-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2})$
Unilateral izda.	$H_0:\ p_X\geq p_Y$	$H_1:\ p_X<p_Y$	$(-z_{1-\alpha}, \infty)$
Unilateral dcha.	$H_0:\ p_X\leq p_Y$	$H_1:\ p_X>p_Y$	$(-\infty, z_{1-\alpha})$

4.17 Contraste para estimadores máximo verosímiles con muestras grandes

En situaciones en las que trabajemos con tamaños muestrales grandes y estimadores de parámetros desconocidos obtenidos por máxima verosimilitud, podemos construir contrastes de hipótesis para esos parámetros usando la aproximación asintótica normal. Así dado el contraste

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

obtenemos el estadístico (bajo H_0) dado por

$$Z = \frac{\widehat{\theta}_{MV} - \theta_0}{\sigma_{H_0}\left(\widehat{\theta}_{MV}\right)} \text{ es asintóticamente } N\left(0,1\right)$$

siendo $\widehat{\theta}_{MV}$ el estimador de máxima verosimilitud de θ, y $\sigma_{H_0}\left(\widehat{\theta}_{MV}\right)$ la desviación típica (bajo H_0) del estimador.

Por tanto, una vez fijado el nivel de significación α, se rechaza la hipótesis nula si el valor anterior es significativamente grande o pequeño, es decir,

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } Z = \frac{\widehat{\theta}_{MV} - \theta_0}{\sigma_{H_0}\left(\widehat{\theta}_{MV}\right)} > z_{1-\alpha/2} \text{ ó } Z = \frac{\widehat{\theta}_{MV} - \theta_0}{\sigma_{H_0}\left(\widehat{\theta}_{MV}\right)} < z_{\alpha/2}$$

El constraste unilateral se realiza de forma análoga a los comentados en secciones anteriores.

Tabla resumen:

Contraste	H. nula	H. alternativa	R. de aceptación
Bilateral	$H_0: \theta = \theta_0$	$H_1: \theta \neq \theta_0$	$(-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2})$
Unilateral izda.	$H_0: \theta \geq \theta_0$	$H_1: \theta < \theta_0$	$(-z_{1-\alpha}, \infty)$
Unilateral dcha.	$H_0: \theta \leq \theta_0$	$H_1: \theta > \theta_0$	$(-\infty, z_{1-\alpha})$