

Introducción á lóxica matemática

Fundamentos Matemáticos para a Informática

Curso 2024/2025

- 1 Proposicións
- 2 Equivalencias lóxicas
- 3 Predicados e cuantificadores
- 4 Razoamento dedutivo
- 5 Métodos de demostración

1. Proposicións

Definición

Unha **proposición** é unha oración declarativa que é verdadeira ou falsa, pero non ambas cousas á vez

Exemplo

Son proposicións:

- 1 O río Miño pasa por Ourense.
- 2 $1 - 100 = 99$
- 3 A suma de dous números positivos é un número positivo.

Non son proposicións

- 4 Que hora é?
- 5 Escoitádeme.
- 6 $x + 2 = 5$

Definición

Denotaremos as proposicións por letras minúsculas **p**, **q**, **r**, **s**, ...

Exemplo

p: O río Miño pasa por Ourense.

q: $1 - 100 = 99$

Definicións

Definición

Denotaremos as proposicións por letras minúsculas **p**, **q**, **r**, **s**, ...

Exemplo

p: O río Miño pasa por Ourense.

q: $1 - 100 = 99$

Definición

O **valor de verdade** dunha proposición é **verdadeiro** se a proposición é verdadeira (V) e é **falso** se a proposición é falsa (F).

Exemplo

p é V

q é F

Exercicio

Cales destas frases son proposicións? Cal é o valor de verdade daquelas que son proposicións?

- Lugo é a capital de Galicia.
- Madrid é a capital de España.
- $2 + 3 = 5$
- $5 + 7 = 10$
- $x + 2 = 11$
- Responde a esta pregunta.
- $x + y = y + x$ para todo par de números reais x e y .

Definición

Un **operador lóxico** é un elemento verbal ou escrito que permite formar unha proposición (chamada **proposición composta**) a partir doutras (chamadas **proposicións atómicas**).

Exemplo

- 1 Pareces canso ou enfermo.
- 2 Está chovendo e fai moito vento.
- 3 Non te escoito.
- 4 Ou vés ao laboratorio regularmente ou tes que realizar unha proba práctica.
- 5 Se non entendo, pregunto.
- 6 Comerei se, e só se, teño fame.

Operador lóxico	Notación	Lese
Disxunción ou Ou inclusivo	$\vee$	ou
Conxunción	$\wedge$	e
Negación	$\neg$	non
Ou exclusivo	$\oplus$	ou ... ou ...
Implicación	$\rightarrow$	se ..., entón ...
Bicondicional ou dobre implicación	$\leftrightarrow$	... se, e só se, ...

Exemplo

p : Hoxe é venres

q : Hoxe chove

1 $p \vee q$: Hoxe é venres ou chove.

2 $p \wedge q$: Hoxe é venres e chove.

3 $\neg p$: Hoxe non é venres.

4 $p \oplus q$: Ou hoxe é venres, ou hoxe chove.

5 $p \rightarrow q$: Se hoxe é venres, entón hoxe chove.

6 $p \leftrightarrow q$: Hoxe é venres se, e só se, hoxe chove.

Exercicio

p : Comprei un billete de lotería.

q : Gañei un millón de euros.

Exprésalo en linguaxe natural:

$$\neg p, p \vee q, p \rightarrow q, p \wedge q, p \leftrightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q, \neg p \wedge \neg q, \neg p \vee (p \wedge q)$$

Exercicio

p : Conduces a máis de 100 km por hora.

q : Múltante por exceso de velocidade.

Escribe os enunciados seguintes usando p e q e conectivos lóxicos.

- Non conduces a máis de 100 km por hora.
- Conduces a máis de 100 km por hora, pero non te multan por exceso de velocidade.
- Multarante por exceso de velocidade se conduces a máis de 100 km por hora.
- Se non conduces a máis de 100 km por hora non te multarán por exceso de velocidade.
- Múltante por exceso de velocidade pero non conduces a máis de 100 km por hora.
- Sempre que te multan por exceso de velocidade conduces a máis de 100 km por hora.

Negación ($\neg$)

$\neg p$ lese “non p ” e é a proposición “non se cumpre p ”

p	$\neg p$
V	F
F	V

Exemplo

p : Hoxe é venres, $\neg p$: Hoxe non é venres.

q : $2 + 5 = 7$, $\neg q$: $2 + 5 \neq 7$.

Conxunción ($\wedge$)

$p \wedge q$ lese “ p e q ” e é a proposición “cúmprense p e q ”

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo

p : Hoxe é venres, q : Hoxe chove.

$p \wedge q$: Hoxe é venres e chove.

A proposición $p \wedge q$ só é verdadeira os venres que chove.

Disxunción ($\vee$)

$p \vee q$ lese “ p ou q ” e é a proposición “ou se cumpre p ou se cumpre q ou ambas”

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo

p : Hoxe é venres, q : Hoxe chove.

$p \vee q$: Hoxe é venres ou hoxe chove.

A proposición $p \vee q$ só é falsa os días que nin son venres nin chove.

Ou exclusivo ($\oplus$)

$p \oplus q$ lese “ou p ou q ” e é a proposición “ou se cumpre p ou se cumpre q , pero non ambas”

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo

p : Hoxe é venres, q : Hoxe chove.

$p \oplus q$: Ou hoxe é venres ou hoxe chove.

A proposición $p \oplus q$ é falsa os días que nin son venres nin chove ou os días que son venres e chove.

Implicación ($\rightarrow$)

$p \rightarrow q$ lese “se p , entón q ” e é a proposición “se p é verdadeira, entón q tamén”

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Implicación ($\rightarrow$)

$p \rightarrow q$ lese “se p , entón q ” e é a proposición “se p é verdadeira, entón q tamén”

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

“ p é suficiente para que se cumpra q ”

Implicación ($\rightarrow$)

$p \rightarrow q$ lese “se p , entón q ” e é a proposición “se p é verdadeira, entón q tamén”

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

“ p é suficiente para que se cumpra q ”

“ q é necesaria para que se cumpra p ”

Implicación ($\rightarrow$)

$p \rightarrow q$ lese “se p , entón q ” e é a proposición “se p é verdadeira, entón q tamén”

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

“ p é suficiente para que se cumpra q ”

“ q é necesaria para que se cumpra p ”

- $q \rightarrow p$ é a **recíproca**
- $\neg q \rightarrow \neg p$ é a **contra-recíproca**.

Exemplo

p : Fai frío.

q : Acendo a calefacción.

$p \rightarrow q$: Se fai frío, acendo a calefacción

Só é falsa se fai frío e non acendo a calefacción.

$q \rightarrow p$: Se acendo a calefacción, fai frío.

$\neg q \rightarrow \neg p$: Se non acendo a calefacción, non fai frío.

A contra-recíproca é equivalente á implicación orixinal. A recíproca non.

Exemplo

Se no momento de facer o check-in levas a bici nunha funda, entón podes pasar ao tren.

Exemplo

*Se no momento de facer o check-in levas a bici nunha funda,
entón podes pasar ao tren.*

Exemplo

Se $2 + 2 = 5$, entón eu son o Papa.

Exemplo

Se no momento de facer o check-in levas a bici nunha funda, entón podes pasar ao tren.

Exemplo

Se $2 + 2 = 5$, entón eu son o Papa.

Demostración:

Exemplo

Se no momento de facer o check-in levas a bici nunha funda, entón podes pasar ao tren.

Exemplo

Se $2 + 2 = 5$, entón eu son o Papa.

Demostración:

$2 + 2 = 5$, entón $4 = 5$, polo tanto, $1 = 2$, así que $2 = 1$.

Exemplo

Se no momento de facer o check-in levas a bici nunha funda, entón podes pasar ao tren.

Exemplo

Se $2 + 2 = 5$, entón eu son o Papa.

Demostración:

$2 + 2 = 5$, entón $4 = 5$, polo tanto, $1 = 2$, así que $2 = 1$.

O Papa e mais eu somos dúas persoas, así que somos unha persoa.

Exemplo

Se no momento de facer o check-in levas a bici nunha funda, entón podes pasar ao tren.

Exemplo

Se $2 + 2 = 5$, entón eu son o Papa.

Demostración:

$2 + 2 = 5$, entón $4 = 5$, polo tanto, $1 = 2$, así que $2 = 1$.

O Papa e mais eu somos dúas persoas, así que somos unha persoa.

Eu son o Papa!

Exemplo

Se no momento de facer o check-in levas a bici nunha funda, entón podes pasar ao tren.

Exemplo

Se $2 + 2 = 5$, entón eu son o Papa.

Demostración:

$2 + 2 = 5$, entón $4 = 5$, polo tanto, $1 = 2$, así que $2 = 1$.

O Papa e mais eu somos dúas persoas, así que somos unha persoa.

Eu son o Papa!

Exemplo

Para todo $x \in \{1, 2, 3, 4\}$, se x impar, entón, $x^2 < 10$.

Dobre implicación ($\leftrightarrow$)

$p \leftrightarrow q$ lese “ p se, e só se q ” e é a proposición “cúmprese p se, e só se, cúmprese q ”

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo

p : Supero a proba, q : Estudo.

$p \leftrightarrow q$: Supero a proba se, e só se, estudo.

A proposición $p \leftrightarrow q$ é certa sempre que p e q teñan o mesmo valor.

Exercicio

Determina os valores de verdade das seguintes proposicións:

- 1 É venres e chove.
- 2 É venres ou non chove.
- 3 É venres, se, e só se, chove.
- 4 Se chove, é venres.
- 5 É suficiente que chova para que non sexa venres.
- 6 Non ocorre: é venres e chove.
- 7 Nin é venres nin chove.

Exemplo

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ten a mesma táboa de verdade que $p \leftrightarrow q$.

Exercicio

Constrúe as táboas de verdade:

1 $(p \vee \neg q) \rightarrow q$

2 $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

3 $(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$

4 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

5 $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

6 $(p \oplus q) \rightarrow (p \wedge q)$

Definición

- 1 **Tautoloxía**: Fórmula verdadeira independentemente dos valores de verdade das fórmulas atómicas que a compoñen.
- 2 **Contradición**: Fórmula falsa ...
- 3 **Continxencia**: Fórmula que non é nin tautoloxía nin contradición.

A táboa de verdade dunha tautoloxía unicamente ten valores verdadeiros na súa última columna, a dunha contradición valores falsos, e a dunha continxencia valores verdadeiros e falsos.

Tautoloxías, contradicións e continxencias

UN MOMENTO. ¿DEBO UNIRME A ESTA SOCIEDAD DE HONOR PARA DEMOSTRARLE A MIS COLEGAS QUE SOY HONORABLE, Y SOY HONORABLE PORQUE PERTENEZCO A UNA SOCIEDAD DE HONOR?



ME PARECE QUE PODRÍA AHORRARME TIEMPO UNIÉNDOME DIRECTAMENTE AL CLUB DE LA TAUTOLOGÍA.



CLUB DE LA TAUTOLOGÍA:

¿CÓMO SUPISTE TÚ DE NOSOTROS?

DE VUESTRO GRUPO DE FACEBOOK, "SI SE UNEN 1.000.000 DE PERSONAS A ESTE GRUPO, TENDRÁ 1.000.000 DE PERSONAS."

¡ESCUCHAD! LA PRIMERA REGLA DEL CLUB DE LA TAUTOLOGÍA ES LA PRIMERA REGLA DEL CLUB DE LA TAUTOLOGÍA.



Exemplo

$p \vee \neg p$ é unha tautoloxía

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Exemplo

$p \vee \neg p$ é unha tautoloxía

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Exemplo

$p \wedge \neg p$ é unha contradición

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Tautoloxías importantes

- 1 $(p \wedge q) \rightarrow p$
- 2 $p \rightarrow (p \vee q)$
- 3 $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- 4 $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
- 5 $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$
- 6 $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$
- 7 $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
- 8 $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Exercicio

Constrúe as táboas de verdade das tautoloxías anteriores.

2. Equivalencias Lógicas

Definición

p e q son **lógicamente equivalentes** se $p \leftrightarrow q$ é unha tautoloxía. É dicir, se p e q son simultaneamente verdadeiras ou falsas. Se denota por $p \equiv q$.

Definición

p e q son **lógicamente equivalentes** se $p \leftrightarrow q$ é unha tautoloxía. É dicir, se p e q son simultaneamente verdadeiras ou falsas. Se denota por $p \equiv q$.

Exemplo

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Equivalencias lógicas relativas a $\neg$, $\wedge$ e $\vee$

Identidade	$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$
Dominación	$p \vee V \equiv V$ $p \wedge F \equiv F$
Idempotentes	$p \vee p \equiv p,$ $p \wedge p \equiv p$
Dobre negación	$\neg(\neg p) \equiv p$
Conmutativas	$p \vee q \equiv q \vee p,$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Absorción	$p \vee (p \wedge q) \equiv p,$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Asociativas	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r),$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Distributivas	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r),$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
De Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q,$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Exemplo

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Proba:

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q)\end{aligned}$$

Equivalencias lógicas relativas a $\rightarrow$

- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
- $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
- $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
- $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
- $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
- $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
- $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

Exercicio

Demostra as equivalencias anteriores.

Equivalencias lógicas relativas a $\leftrightarrow$

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$
- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Exercicio

Demostra as equivalencias anteriores.

Exercicio

Demostra que son tautoloxías:

1 $(p \wedge q) \rightarrow p$

2 $p \rightarrow (p \vee q)$

3 $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

4 $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

5 $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

3. Predicados e cuantificadores

Exemplo

$x + 2 = 5$ non é unha proposición, xa que o seu valor depende de x .

Exemplo

$x + 2 = 5$ non é unha proposición, xa que o seu valor depende de x .

Definición

Unha sentenza P que alude a unha ou varias variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ chámase **predicado** e denótase $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Todo predicado $P(X)$ pódese considerar como unha aplicación P que asocia unha proposición $P(x)$ a cada elemento x dun certo conxunto chamado **universo do predicado** ou **dominio do predicado**.

Cando as variables dun predicado tomen valores concretos o resultado será unha proposición.

Exemplo

$P(X)$: $X > 3$, onde X representa a qualquer número real. O universo é $\mathbb{R}$.

$P(4)$ é V e $P(2)$ é F

Exemplo

$P(X)$: $X > 3$, onde X representa a qualquer número real. O universo é $\mathbb{R}$.

$P(4)$ é V e $P(2)$ é F

Exemplo

$Q(X, Y)$: $X + Y = 5$, onde X e Y representam a dois números reais.

O universo é $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$Q(0, 5)$ é V, $Q(-1, 6)$ é V, $Q(0, \frac{1}{2})$ é F

Exemplo

$P(X)$: $X > 3$, onde X representa a qualquer número real. O universo é $\mathbb{R}$.

$P(4)$ é V e $P(2)$ é F

Exemplo

$Q(X, Y)$: $X + Y = 5$, onde X e Y representam a dois números reais.

O universo é $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$Q(0, 5)$ é V, $Q(-1, 6)$ é V, $Q(0, \frac{1}{2})$ é F

Exercicio

$P(X, Y)$: “ X é a capital de Y ”. Determina os valores de verdade de:

- 1 $P(\text{Paris}, \text{Francia})$
- 2 $P(\text{Coimbra}, \text{Portugal})$
- 3 $P(\text{Coreia do Norte}, \text{Pyongyang})$

Definición

Se P e Q teñen o mesmo universo, podemos facer operacións lóxicas con eles:

- 1 $\neg P(X)$ asocia a cada elemento x do universo $\neg P(x)$
- 2 $(P \vee Q)(X)$ asocia a cada elemento x do universo $P(x) \vee Q(x)$
- 3 $(P \wedge Q)(X)$ asocia a cada elemento x do universo $P(x) \wedge Q(x)$

Definición

Se P e Q teñen o mesmo universo, podemos facer operacións lóxicas con eles:

- 1 $\neg P(X)$ asocia a cada elemento x do universo $\neg P(x)$
- 2 $(P \vee Q)(X)$ asocia a cada elemento x do universo $P(x) \vee Q(x)$
- 3 $(P \wedge Q)(X)$ asocia a cada elemento x do universo $P(x) \wedge Q(x)$

Exemplo

$P(X)$: X é un número par

$Q(X)$: X é o cadrado dun número natural

O universo son os números naturais ($\mathbb{N}$).

- 1 $\neg P(X)$: X non é un número par
- 2 $(P \vee Q)(X)$: X é par ou é o cadrado dun número natural.
- 3 $(P \wedge Q)(X)$: X é par e é o cadrado dun número natural.

Definición

A **cuantificación universal** de $P(X)$ é a proposición “ $P(X)$ é verdadeira para todos os valores x do dominio U ”.

$$\forall x \in U, P(x)$$

- $\forall x, P(x)$ é V se $P(x)$ é verdadeira para todos os valores x en U .
- $\forall x, P(x)$ é F se atopamos un valor x en U para o cal $P(x)$ é falsa. Este valor x chámase **contraexemplo**.

Definición

A **cuantificación universal** de $P(X)$ é a proposición “ $P(X)$ é verdadeira para todos os valores x do dominio U ”.

$$\forall x \in U, P(x)$$

- $\forall x, P(x)$ é V se $P(x)$ é verdadeira para todos os valores x en U .
- $\forall x, P(x)$ é F se atopamos un valor x en U para o cal $P(x)$ é falsa. Este valor x chámase **contraexemplo**.

Exemplo

$$P(X) : X \leq X^2$$

$$Q(X) : X \text{ é par}$$

- 1 $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$. É V, porque para calquera número natural x , tense que $x \leq x^2$.
- 2 $\forall x \in \mathbb{N}, Q(x)$. É F, porque 3 é un contraexemplo.

Definición

A **cuantificación existencial** de $P(X)$ é a proposición "existe un elemento x en U tal que $P(x)$ é verdadeira".

$$\exists x \in U, P(x)$$

- $\exists x, P(x)$ é V se existe un valor x en U para o cal $P(x)$ é verdadeira.
- $\exists x, P(x)$ é F se $P(x)$ é falsa para todos os valores x en U .

Definición

A **cuantificación existencial** de $P(X)$ é a proposición “existe un elemento x en U tal que $P(X)$ é verdadeira”.

$$\exists x \in U, P(x)$$

- $\exists x, P(x)$ é V se existe un valor x en U para o cal $P(x)$ é verdadeira.
- $\exists x, P(x)$ é F se $P(x)$ é falsa para todos os valores x en U .

Exemplo

$$P(X) : X > X^2$$

$$Q(X) : X \text{ é par}$$

- 1 $\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$. É F, porque non hai ningún número natural maior que o seu cadrado.
- 2 $\exists x \in \mathbb{N}, Q(x)$. É V, porque 2 é un exemplo.

Exercicio

Determina o valor de verdade de:

1 $\forall x \in \mathbb{R}, x < 100 \implies x - 1 < 100$

2 $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \implies x \leq x^2$

3 $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n$

4 $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2 + 1} > 1$

Negación de expresiones

$$\neg(\forall x, P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x, P(x)) \equiv \forall x, \neg P(x)$$

Negación de expresiones

$$\neg(\forall x, P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x, P(x)) \equiv \forall x, \neg P(x)$$

Exemplo

Sexa $P(X)$: “ X elixiu a Bulbasur no Pokemon vermello”,

$U = \{\text{alumnos de 1º da E.S.E.I.}\}$

1 $\neg(\forall x, P(x))$: hai polo menos un alumno que non elixiu a Bulbasur.

2 $\neg(\exists x, P(x))$: ningún alumno elixiu a Bulbasur.

Conxunción

$$\forall x, P(x) \wedge Q(x) \equiv (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$$

$$\exists x, P(x) \wedge Q(x) \not\equiv (\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$$

Conxunción

$$\forall x, P(x) \wedge Q(x) \equiv (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$$

$$\exists x, P(x) \wedge Q(x) \not\equiv (\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$$

Disxunción

$$\forall x, P(x) \vee Q(x) \not\equiv (\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$$

$$\exists x, P(x) \vee Q(x) \equiv (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$$

Exemplo

$P(X)$: X é unha vocal,

$Q(X)$: X é unha consonante, U é o alfabeto

- 1 $\exists x, P(x) \wedge Q(x)$: Existe unha letra que é vogal e consonante.
- 2 $(\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$: Existe unha letra que é vogal e existe unha letra que é consonante.
- 3 $\forall x, P(x) \vee Q(x)$: Toda letra é vogal ou consonante.
- 4 $(\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$: Todas as letras son vogais ou todas as letras son consonantes.

Exercicio

Nega as seguintes proposicións:

1 $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2 + 1} < 1$

2 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < x$

Definición

A unicidade da quantificación existencial de $P(X)$ é a proposición “existe un único elemento x no dominio tal que $P(x)$ é verdadeira”.

$$\exists^{\bullet} x, P(x)$$

Definición

A unicidade da quantificación existencial de $P(X)$ é a proposición “existe un único elemento x no dominio tal que $P(x)$ é verdadeira”.

$$\exists^{\bullet} x, P(x)$$

$$\exists^{\bullet} x, P(x) \equiv (\exists x, P(x)) \wedge [\forall y, \forall z, (P(y) \wedge P(z)) \rightarrow (y = z)]$$

Definición

A unicidade da quantificação existencial de $P(X)$ é a proposición “existe un único elemento x no dominio tal que $P(x)$ é verdadeira”.

$$\exists^{\bullet} x, P(x)$$

$$\exists^{\bullet} x, P(x) \equiv (\exists x, P(x)) \wedge [\forall y, \forall z, (P(y) \wedge P(z)) \rightarrow (y = z)]$$

Exemplo

$P(X)$: $X + X = 0$, no universo $U = \mathbb{R}$.

$\exists^{\bullet} x, P(x)$ é V, soamente é certo para $x = 0$.

Exercicio

$P(X)$: X é un número primo,

$Q(X)$: X é un número par,

Universo $U = \mathbb{N}$.

Expresa en linguaxe natural e estuda o seu valor de verdade:

1 $\exists x, P(x) \vee Q(x)$

2 $\forall x, P(x) \vee Q(x)$

3 $(\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$

4 $\forall x, P(x) \wedge Q(x)$

5 $\exists x, P(x) \wedge Q(x)$

6 $(\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$

7 $\exists^\bullet x, P(x) \wedge Q(x)$

Definición

Sexa $P(X, Y)$ un predicado.

- $\forall x, \forall y, P(x, y)$: “para todo par x, y , $P(x, y)$ é verdadeira”.
- $\exists x, \exists y, P(x, y)$: “existe un par x, y para o cal $P(x, y)$ é verdadeira”.
- $\forall x, \exists y, P(x, y)$: “para cada x hai un y para o cal $P(x, y)$ é verdadeira”.
- $\exists x, \forall y, P(x, y)$: “existe un x para o cal $P(x, y)$ é verdadeira para todo y ”.

Definição

Seja $P(X, Y)$ um predicado.

- $\forall x, \forall y, P(x, y)$: “para todo par x, y , $P(x, y)$ é verdadeira”.
- $\exists x, \exists y, P(x, y)$: “existe um par x, y para o qual $P(x, y)$ é verdadeira”.
- $\forall x, \exists y, P(x, y)$: “para cada x há um y para o qual $P(x, y)$ é verdadeira”.
- $\exists x, \forall y, P(x, y)$: “existe um x para o qual $P(x, y)$ é verdadeira para todo y ”.

Exemplo

$P(X, Y) : X \geq Y$. Onde $U = \mathbb{N}$.

- 1 $\forall x, \exists y, P(x, y)$: Para todo número natural, existe um elemento menor ou igual.
- 2 $\exists x, \forall y, P(x, y)$: Existe um número natural que é maior ou igual que todos os demais.

Exemplo

- 1 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$: a suma de dous números reais é conmutativa.
- 2 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y$: existencia do elemento neutro para a suma (x é o 0).
- 3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = y + x = 0$: existencia do elemento oposto para a suma (y é $-x$).
- 4 $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \cdot y = \frac{x}{y} = -1$.

Exemplo

- 1 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$: a suma de dous números reais é conmutativa.
- 2 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y$: existencia do elemento neutro para a suma (x é o 0).
- 3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = y + x = 0$: existencia do elemento oposto para a suma (y é $-x$).
- 4 $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \cdot y = \frac{x}{y} = -1$.

Exercicio

Expresa a proposición “existe un número natural que é o cadrado dun número natural” utilizando dous variables.

Observación

$$\exists y, \forall x, P(x, y) \not\equiv \forall x, \exists y, P(x, y)$$

Observación

$$\exists y, \forall x, P(x, y) \not\equiv \forall x, \exists y, P(x, y)$$

Exemplo

$P(X, Y) : X + Y = 0, U = \mathbb{R}$

- 1 $\exists y, \forall x, P(x, y) : \text{É F.}$
- 2 $\forall x, \exists y, P(x, y) : \text{É V (y sería } -x\text{).}$

Observación

$$\exists y, \forall x, P(x, y) \not\equiv \forall x, \exists y, P(x, y)$$

Exemplo

$$P(X, Y) : X + Y = 0, U = \mathbb{R}$$

- 1 $\exists y, \forall x, P(x, y) : \text{É F.}$
- 2 $\forall x, \exists y, P(x, y) : \text{É V (y sería } -x\text{).}$

Exercicio

Determina o valor de verdade onde $U = \mathbb{R}$.

- 1 $\forall x, \forall y, x > y$
- 2 $\exists x, \forall y, x > y$
- 3 $\forall x, \exists y, x > y$
- 4 $\exists x, \exists y, x > y$

Negación dos cuantificadores anidados

- $\neg(\forall x, \forall y, P(x, y)) \equiv \exists x, \exists y, \neg P(x, y)$
- $\neg(\exists x, \exists y, P(x, y)) \equiv \forall x, \forall y, \neg P(x, y)$
- $\neg(\forall x, \exists y, P(x, y)) \equiv \exists x, \forall y, \neg P(x, y)$
- $\neg(\exists x, \forall y, P(x, y)) \equiv \forall x, \exists y, \neg P(x, y)$

Cuantificadores anidados

Negación dos cuantificadores anidados

- $\neg(\forall x, \forall y, P(x, y)) \equiv \exists x, \exists y, \neg P(x, y)$
- $\neg(\exists x, \exists y, P(x, y)) \equiv \forall x, \forall y, \neg P(x, y)$
- $\neg(\forall x, \exists y, P(x, y)) \equiv \exists x, \forall y, \neg P(x, y)$
- $\neg(\exists x, \forall y, P(x, y)) \equiv \forall x, \exists y, \neg P(x, y)$

Exercicio

Escribe a negación dos seguintes enunciados, onde $U = \mathbb{R}$.

- 1 $\forall x, \forall y, x^2 > y + 1$
- 2 $\exists x, \forall y, x^2 > y + 1$
- 3 $\forall x, \exists y, x^2 > y + 1$
- 4 $\exists x, \exists y, x^2 > y + 1$

Cuantificadores anidados

Negación dos cuantificadores anidados

- $\neg(\forall x, \forall y, P(x, y)) \equiv \exists x, \exists y, \neg P(x, y)$
- $\neg(\exists x, \exists y, P(x, y)) \equiv \forall x, \forall y, \neg P(x, y)$
- $\neg(\forall x, \exists y, P(x, y)) \equiv \exists x, \forall y, \neg P(x, y)$
- $\neg(\exists x, \forall y, P(x, y)) \equiv \forall x, \exists y, \neg P(x, y)$

Exercicio

Escribe a negación dos seguintes enunciados, onde $U = \mathbb{R}$.

- 1 $\forall x, \forall y, x^2 > y + 1$
- 2 $\exists x, \forall y, x^2 > y + 1$
- 3 $\forall x, \exists y, x^2 > y + 1$
- 4 $\exists x, \exists y, x^2 > y + 1$

Observación

$$\begin{aligned}\neg(\exists^{\bullet} x, P(x)) &\equiv \neg(\exists x, P(x)) \vee \neg(\forall y, z, (P(y) \wedge P(z)) \rightarrow (y = z)) \\ &\equiv (\forall x, \neg P(x)) \vee (\exists y, z, y \neq z, P(y) \wedge P(z))\end{aligned}$$

4. Razoamento dedutivo

Definición

As **regras de inferencia** son argumentos baseados en tautoloxías, é dicir, son métodos de razoamento universalmente correctos. Baséanse nas tautoloxías:

$$\text{Hipótese 1} \wedge \text{Hipótese 2} \wedge \dots \rightarrow \text{Conclusión}$$

Notación

$$\begin{array}{c} \text{Hipótese 1} \\ \text{Hipótese 2} \\ \vdots \\ \hline \therefore \text{Conclusión} \end{array}$$

$\therefore$ lese “polo tanto”, “logo”.

Reglas de inferencia más usadas

Regra	Tautología	Nome
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q)$	<i>adición</i>
$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	<i>simplificación</i>
$\frac{p}{q} \therefore p \wedge q$	$((p) \wedge (q)) \rightarrow p \wedge q$	<i>conxunción</i>
$\frac{p}{p \rightarrow q} \therefore q$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	<i>modus ponens</i>
$\frac{\neg q}{p \rightarrow q} \therefore \neg p$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	<i>modus tollens</i>

Regras de inferencia máis usadas

Regra	Tautoloxía	Nome
$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	<i>siloxismo hipotético</i>
$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p)) \rightarrow q$	<i>siloxismo disxuntivo</i>
$\frac{p \vee q \quad \neg p \vee r}{\therefore q \vee r}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	<i>lei de resolución</i>

Exemplo

O argumento

“Se fai frío, acendo a calefacción. Fai frío, logo acendo a calefacción.”

baséase na regra de inferencia **modus ponens**:

p : Fai frío

q : Acendo a calefacción

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$$

Exercicio

Determina en que regra de inferencia se basean os seguintes argumentos:

- 1 Fai frío. Polo tanto, fai frío ou chove.
- 2 Fai frío e chove. Polo tanto, chove.
- 3 Fai frío. Chove. Polo tanto, fai frío e chove.
- 4 Se fai frío, acendo a calefacción. Se acendo a calefacción, o consumo de electricidade aumenta. Se fai frío, o consumo de electricidade aumenta.
- 5 Se fai frío, acendo a calefacción. Non acendo a calefacción, logo non fai frío.
- 6 Chove ou fai frío. Non fai frío. Polo tanto, chove.
- 7 Vou ao cine ou vou á piscina. Non vou ao cine ou vou á praia. Polo tanto, vou á piscina ou vou á praia

Exercicio

Determina en que regra de inferencia se basean os seguintes argumentos:

- 8 Se chegas a presidente entón é porque conseguiches apoios. Tes a lista máis votada pero non conseguiches apoios. Polo tanto, non chegas a presidente.
- 9 Se aprobas FMI, gañas unha viaxe a Abu Dhabi. Se gañas unha viaxe a Abu Dhabi, o emérito regálache un Ferrari. Aprobas FMI, polo tanto, o emérito regálache un Ferrari.

Un argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$ é **válido** se sempre que $P_1, P_2, \dots, P_n$ sexan todas verdadeiras, entón Q tamén sexa verdadeira.

Observa que non dicimos que a conclusión Q sexa verdadeira; senón que se garanten as hipóteses, entón tense garantida a conclusión. Un argumento é válido debido á súa forma, non ao seu contido.

Exemplo

O argumento

“Fumar é saudable. Se fumar é saudable, entón os cigarros son receitaados polos médicos. Entón os cigarros son receitaados polos médicos.”

O razoamento é válido, baséase a regra de inferencia **modus ponens**:

p : Fumar é saudable

q : Os cigarros son receitaados polos médicos

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$$

Exercicio

Determina se os seguintes argumentos son válidos:

- 1 Se baixan os impostos, entón elévanse os ingresos. Os ingresos elévanse. Entón baixan os impostos.
- 2 Se $2 = 3$, entón pilotei un avión. $2 = 3$. Entón pilotei un avión.
- 3 Se fumar é saudable, entón os cigarros son receitados polos médicos. Fumar non é saudable. Entón os cigarros non son receitados polos médicos.
- 4 Se $2 = 3$, entón pilotei un avión. Pilotei un avión. Entón $2 = 3$.

Definición

As **falacias** son unha forma de razoamento incorrecto baseadas en continxencias.

Falacias frecuentes

- 1 **Falacia de afirmar a conclusión** : $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
- 2 **Falacia de negar a hipótese** : $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$

Exemplo

No anterior exercicio:

- 1 O último razoamento é a falacia de afirmar a conclusión.
- 2 O terceiro razoamento é a falacia de negar a hipótese.

Exercicio

Estuda a validez do seguinte argumento:

“Se fas todos os exercicios das notas, aprenderás matemática discreta. Ti aprendiches matemática discreta. Polo tanto, fixeches todos os exercicios das notas.”

Exercicio

Estuda a validez do seguinte argumento:

“Se fas todos os exercicios das notas, aprenderás matemática discreta. Ti aprendiches matemática discreta. Polo tanto, fixeches todos os exercicios das notas.”

Exercicio

Estuda a validez do seguinte argumento:

“Condición suficiente para que eu aprobe é que eu saiba ou que o profesor non sexa xusto. Eu non sei e o profesor non é xusto. Polo tanto, suspendo”

Exercicio

Estuda a validez do seguinte argumento:

“Se xogo ao LOL estrésome. Saio a pasear e non me estreso. Se saio a pasear ou escoito música, entón a vida é mellor. Polo tanto, non xogo ao LOL e a vida é mellor.”

Exercicio

Estuda a validez do seguinte argumento:

“Se xogo ao LOL estrésome. Saio a pasear e non me estreso. Se saio a pasear ou escoito música, entón a vida é mellor. Polo tanto, non xogo ao LOL e a vida é mellor.”

Exercicio

Estuda a validez do seguinte argumento:

“Se xogo ao LOL non gaño. Enfádome se abro Twitter. Xogo ao LOL e enfádome. Polo tanto non gaño e abro Twitter.”

Reglas de inferencia cuantificadas

Sea $P(X)$ un predicado e c un elemento en U .

Regra	Nome
$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	<i>particularización universal</i>
$\frac{P(c), c \text{ arbitrario}}{\therefore \forall x P(x)}$	<i>generalización universal</i>
$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c), \text{ para algún elemento } c}$	<i>particularización existencial</i>
$\frac{P(c), \text{ para algún elemento } c}{\therefore \exists x P(x)}$	<i>generalización existencial</i>

Exemplo

O argumento

“Todos os alumnos de FMI están matriculados en Enxeñaría Informática. María é unha alumna de FMI. Entón María está matriculada en Enxeñaría Informática.”

baséase na regra de inferencia **particularización universal**:

$P(x)$: x está matriculado en Ingeniería Informática

$c = \text{María}$

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

Exercicio

Determina en que regra de inferencia se basean os seguintes argumentos:

- 1 Un estudante desta clase non leu o libro. Logo, alguén non leu o libro.
- 2 Todos os estudantes da clase entenden lóxica. Alex é un estudante da clase. Polo tanto, Alex entende lóxica.
- 3 Todos os estudantes do Grao en Enxeñaría Informática cursan FMI. María cursa FMI. Polo tanto, María é estudante do Grao de Enxeñaría Informática.
- 4 Hai un estudante que é diamante no LOL e non fixo o Boletín 2. Todos os estudantes aprobaron o primeiro parcial. Polo tanto, un estudante que é diamante no LOL aprobou o primeiro parcial.

Exercicio

Estuda a validez do seguinte argumento:

“Ves a clase se non te rompes un brazo e non te rompes unha perna. Non te rompes unha perna ou xogas ao pádel. Non ves a clase ou non sacas un dez no exame. Sacas un dez no exame. Polo tanto, rompes un brazo ou xogas ao pádel.”

Exercicio

Estuda a validez do seguinte argumento:

“Ves a clase se non te rompes un brazo e non te rompes unha perna. Non te rompes unha perna ou xogas ao pádel. Non ves a clase ou non sacas un dez no exame. Sacas un dez no exame. Polo tanto, rompes un brazo ou xogas ao pádel.”

Exercicio

Estuda a validez do seguinte argumento:

“Ves a clase se non te rompes un brazo e non te rompes unha perna. Non te rompes unha perna ou xogas ao pádel. Ves a clase ou non sacas un dez no exame. Sacas un dez no exame. Polo tanto, xogas ao pádel.”

5. Métodos de demostración

Sistema matemático

- Supóñense verdadeiros os **axiomas**.
- As **definicións** utilízanse para crear conceptos novos nos términos dos xa existentes.
- Dedúcense **teoremas**

Sistema matemático

- Supóñense verdadeiros os **axiomas**.
- As **definicións** utilízanse para crear conceptos novos nos términos dos xa existentes.
- Dedúcense **teoremas**

Definición

Un **teorema** é unha sentenza que se pode verificar que é verdadeira (é dicir, o seu valor de verdade é verdadeiro). O enunciado dun teorema pode ser da forma:

1 $p \rightarrow q$

2 $p \leftrightarrow q$

3 $\exists x P(x)$

4 $\forall x P(x)$

Exemplo

Son teoremas:

- 1 Se $3n + 2$ é impar, entón n é impar.
- 2 O enteiro n é impar se, e só se, n^2 é un enteiro impar.
- 3 Existen dous números irracionais x e y tales que x^y é racional.
- 4 $\forall n$ con n un número natural positivo, verifícase que $n < 2^n$.

Exemplo

Son teoremas:

- 1 Se $3n + 2$ é impar, entón n é impar.
- 2 O enteiro n é impar se, e só se, n^2 é un enteiro impar.
- 3 Existen dous números irracionais x e y tales que x^y é racional.
- 4 $\forall n$ con n un número natural positivo, verifícase que $n < 2^n$.

Definición

Tipos de teoremas:

- **Proposición**: teorema de menor importancia no discurso.
- **Lema**: teorema sinxelo utilizado na demostración doutros teoremas.
- **Corolario**: proposición que se pode establecer directamente a partir dun teorema que xa foi demostrado.

Definición

Demostración (dun teorema): argumento formado por unha secuencia de sentenzas, mediante o cal próbase que o teorema é verdadeiro. A demostración dun teorema debe comezar coas hipóteses e, mediante axiomas ou postulados e teoremas demostrados previamente, derívanse sentenzas novas, *xustificando cada paso por algunha regra de inferencia* ata chegar á conclusión.

Definición

Demostración (dun teorema): argumento formado por unha secuencia de sentenzas, mediante o cal próbase que o teorema é verdadeiro. A demostración dun teorema debe comezar coas hipóteses e, mediante axiomas ou postulados e teoremas demostrados previamente, derívanse sentenzas novas, *xustificando cada paso por algunha regra de inferencia* ata chegar á conclusión.

<https://www.youtube.com/watch?v=gHJNMiSFuAM>

Definición

Demostración (dun teorema): argumento formado por unha secuencia de sentenzas, mediante o cal próbase que o teorema é verdadeiro. A demostración dun teorema debe comezar coas hipóteses e, mediante axiomas ou postulados e teoremas demostrados previamente, derívanse sentenzas novas, *xustificando cada paso por algunha regra de inferencia* ata chegar á conclusión.

<https://www.youtube.com/watch?v=gHJNMiSFuAM>

Os métodos de demostración úsanse:

- Para demostrar teoremas matemáticos.
- En ciencias da computación (verificación de que un programa de ordenador é correcto, seguridade dos sistemas operativos, inferencias en intelixencia artificial, consistencia das especificacións dun sistema, ...).

Métodos de demostración

Teorema	Método	Demostración
	$p \rightarrow q$	<i>Directa</i>
	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$	<i>Paso ao contra-recíproco</i>
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q \equiv [(p \wedge \neg q) \rightarrow F]$	<i>Redución ao absurdo</i>
	$F \rightarrow q \equiv V$	<i>Baleira</i>
	$p \rightarrow V \equiv V$	<i>Trivial</i>
$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n)$ $\downarrow$ q	$[(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q]$ $\quad \quad \quad \text{ }$ $[(p_1 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)]$	<i>Por casos</i>
$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$	<i>Equivalencia</i>
$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n$	$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n]$ $\quad \quad \quad \text{ }$ $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge \dots \wedge (p_1 \rightarrow p_n)$	<i>Varias equivalencias</i>

Exemplo (Demostración directa)

Teorema: Se n é un enteiro impar, entón n^2 é un enteiro impar.

Proba:

n impar $\implies n = 2k + 1$, para algún enteiro $k \implies$
 $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 \implies n^2$ impar.

Un *corolario* deste resultado: “Se n é un enteiro tal que n^2 é par, entón n é par”.

Exemplo (Demostración directa)

Teorema: Se n é un enteiro impar, entón n^2 é un enteiro impar.

Proba:

n impar $\implies n = 2k + 1$, para algún enteiro $k \implies$
 $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 \implies n^2$ impar.

Un *corolario* deste resultado: “Se n é un enteiro tal que n^2 é par, entón n é par”.

Exemplo (Paso ao contra-recíproco)

Teorema: Se $3n + 2$ é un enteiro impar, entón n é un enteiro impar.

Proba:

Por paso ao contra-recíproco. Vexamos que se n é un enteiro par, entón $3n + 2$ é un enteiro par.

n par $\implies n = 2k$, para algún número enteiro $k \implies$
 $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1) \implies 3n + 2$ é par.

Exemplo (Redución ao absurdo)

Teorema: $\sqrt{2}$ é irracional.

Proba:

Por redución ao absurdo. Supoñamos que $\sqrt{2}$ é racional. Entón:

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, con $a, b \neq 0$ números enteiros sen factores comúns $\implies$

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \iff a^2 = 2b^2 \implies a^2 \text{ é par} \implies a \text{ é par} \implies$$

$a = 2k$, con k un número enteiro $\implies 4k^2 = 2b^2 \iff 2k^2 = b^2 \implies$

b^2 é par $\implies b$ é par $\implies$

contradición, xa que a e b non teñen factores comúns.

Exemplo (Demostración baleira)

Sexa n un número enteiro. Se $P(n)$ é a proposición “Se $n > 1$ é impar, entón $n^2 > n$ ”, demostra que a proposición $P(0)$ é verdadeira.

Proba:

A demostración $P(0)$ é a implicación “Se $0 > 1$ é impar, entón $0^2 > 0$ ”. Como a hipótese é falsa, a implicación é automaticamente verdadeira.

Exemplo (Demostración baleira)

Sexa n un número enteiro. Se $P(n)$ é a proposición “Se $n > 1$ é impar, entón $n^2 > n$ ”, demostra que a proposición $P(0)$ é verdadeira.

Proba:

A demostración $P(0)$ é a implicación “Se $0 > 1$ é impar, entón $0^2 > 0$ ”. Como a hipótese é falsa, a implicación é automaticamente verdadeira.

Exemplo (Demostración trivial)

Sexa n un número enteiro. Se $P(n)$ é a proposición “Se a e b son enteiros positivos, entón $a^n \geq b^n$ ”, demostra que a proposición $P(0)$ é verdadeira.

Proba:

A proposición $P(0)$ é a implicación “Se a e b son enteiros positivos, entón $a^0 \geq b^0$ ”. Como $a^0 = b^0 = 1$, a conclusión de $P(0)$ é verdadeira (e non se usou a hipótese).

Exemplo (Por casos)

Teorema: Sexan x e y números reais, entón $|xy| = |x||y|$.

Proba:

- $x, y \geq 0 \implies xy \geq 0 \implies |xy| = xy = |x||y|$
- $x, y \leq 0 \implies xy \geq 0 \implies |xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$
- $x \geq 0, y \leq 0 \implies xy \leq 0 \implies |xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$
- $x \leq 0, y \geq 0 \implies xy \leq 0 \implies |xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$

Exemplo (Por casos)

Teorema: Sexan x e y números reais, entón $|xy| = |x||y|$.

Proba:

- $x, y \geq 0 \implies xy \geq 0 \implies |xy| = xy = |x||y|$
- $x, y \leq 0 \implies xy \geq 0 \implies |xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$
- $x \geq 0, y \leq 0 \implies xy \leq 0 \implies |xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$
- $x \leq 0, y \geq 0 \implies xy \leq 0 \implies |xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$

Exercicio

Demostra que se n é un enteiro e $n^3 + 5$ é impar, entón n é par usando:

- 1 Unha demostración directa.
- 2 Unha demostración por paso ao contra-recíproco.
- 3 Unha demostración por redución ao absurdo.

Exemplo (Equivalencia)

Teorema: O enteiro n é impar se, e só se, n^2 é un enteiro impar.

Proba:

⇒ Esta implicación probouse nun exemplo anterior.

⇐ Por paso ao contra-recíproco, n par ⇒
 $n = 2k$ para algún enteiro k ⇒ $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ ⇒ n^2 é par.

Exemplo (Equivalencia)

Teorema: O enteiro n é impar se, e só se, n^2 é un enteiro impar.

Proba:

⇒ Esta implicación probouse nun exemplo anterior.

⇐ Por paso ao contra-recíproco, n par $\implies$
 $n = 2k$ para algún enteiro $k \implies n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \implies n^2$ é par.

Exemplo (Varias equivalencias)

Teorema: Mostra que son equivalentes:

- 1 n é un enteiro par.
- 2 $n - 1$ é un enteiro impar.
- 3 n^2 é un enteiro par.

Proba:

$$(1) \implies (2)$$

$$\begin{aligned} n \text{ par} &\implies n = 2k \text{ para algún inteiro } k \implies \\ n - 1 &= 2k - 1 = 2(k - 1) + 1 \implies n - 1 \text{ impar.} \end{aligned}$$

$$(2) \implies (3)$$

$$\begin{aligned} n - 1 \text{ impar} &\implies n - 1 = 2k + 1 \text{ para algún inteiro } k \implies \\ n &= 2k + 2 = 2(k + 1) \implies n^2 = (2(k + 1))^2 = 4(k + 1)^2 \implies n^2 \text{ par.} \end{aligned}$$

$$(3) \implies (1)$$

Por paso ao contra-recíproco, basta probar que se n é impar entón n^2 é impar. Isto xa o probamos nun exemplo anterior.

Exercicio

Sexan $a, b \in \mathbb{R}$, demostra que son equivalentes:

- 1 a é menor que b .
- 2 O valor medio de a e b é maior que a .
- 3 O valor medio de a e b é menor que b .

Exercicio

Atopa o erro no seguinte razoamento: Supoñamos $a = b$.

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a - b)(a + b) = b(a - b)$$

$$a + b = b$$

$$b + b = b$$

$$2b = b$$

$$2 = 1$$

Métodos de demostración

Teorema	Método	Demostración
$\exists x, P(x)$	Atopar a tal que $P(a)$ é $\vee$	<i>Existencia</i>
$\exists x, P(x)$	Por redución ao absurdo	<i>Existencia</i>
$\exists^{\bullet} x, P(x)$	1) Existencia. 2) Unicidade: $y \neq x \implies \neg P(y)$ ou por redución ao absurdo	<i>Existencia e unicidade</i>
$\forall x, P(x)$	Por redución ao absurdo, demostración directa, ...	<i>Existencia</i>
$\forall n \geq n_0, P(n)$	$[P(n_0) \wedge (\forall k, P(k) \rightarrow P(k+1))]$ $\downarrow$ $\forall n, P(n)$	<i>Indución matemática</i>

Exemplo (Existencia)

Teorema: Hai un enteiro positivo que se pode escribir de dúas formas diferentes como suma de cubos enteiros positivos.

Proba:

Tras moitos cálculos, podemos atopar que

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

Exemplo (Existencia)

Teorema: Existen dous números irracionais x e y tales que x^y é racional.

Proba:

Por un exemplo anterior que $\sqrt{2}$ é irracional. Consideremos o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Se é racional, atopamos dous números $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$ con x^y racional.

Por outra banda, se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional, entón podemos facer $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$, de tal forma que

$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Exemplo (Existencia e unicidade)

Teorema: Todo número enteiro ten un único elemento oposto.

Proba:

Existencia: se a é un enteiro, $-a$ é o seu oposto xa que $a + (-a) = 0$.

Unicidade: supoñamos que existe un enteiro $b \neq -a$ tal que $a + b = 0$. Entón:

$$a + b = 0 = a + (-a) \implies a + b - a = -a \implies b = -a$$

Se creemos que unha sentenza da forma $\forall x, P(x)$ é falsa, ou ben non conseguimos atopar unha demostración, buscamos un contraexemplo.

Exemplo

Mostra que a seguinte afirmación é falsa: “Todo enteiro positivo é a suma dos cadrados de tres enteiros”.

O número 7 é un contraexemplo xa que non se pode escribir como suma dos cadrados de tres enteiros.

En efecto, só poderían considerarse os cadrados que non excedan de 7, que son 0, 1 e 4. E utilizando estes tres cadrados, nunca se obtén o 7.

Exemplo (Inducción matemática)

Teorema: $\forall n \in \mathbb{N}$ positivo, verifícase que $2^n > n$.

Proba:

Paso base: $n_0 = 1$. A afirmación $2 < 1$ é trivial.

Paso de indución: Supoñamos que a afirmación é certa para $k \geq 1$ e probémola para $k + 1$.

É dicir, supoñamos que $2^k > k$ para un k arbitrario. Entón

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k = k + k \geq k + 1$$

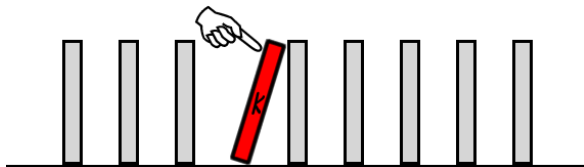
Entón,

$$2^{k+1} > k + 1$$

Paso base:



Dado un k arbitrario:



Supongamos que se cumple k ,
entón cúmprese $k + 1$:



Polo tanto:



Exercicio

Usa a indución matemática para demostrar que:

1. $\sum_{i=0}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\sum_{i=0}^n 3 \cdot 5^i = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$
3. $3^n < n!, \forall n > 6$

Exercicio

Demostra que se x é irracional, entón $1/x$ tamén o é.

Exercicio

Demostra que o cadrado dun enteiro sempre finaliza en 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Axuda: Recorda que $n = 10k + l$, onde l é un número de só unha cifra.