(1)

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

- 1, 2, 1, 3 cont. en $\mathbb{R}$
- $1 \neq 0$ ∀ en $\mathbb{R}$
- 2 cond. Iniciales en un punto $\in \mathbb{R}$

$\Big\}$ ∃ sol y es única

$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m+1)^2 \Rightarrow m = -1$

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \Rightarrow$ $\boxed{y_c(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x} = C_1 e^{-x} + x \cdot C_2 e^{-x}}$

$y(x) = v_1(x) e^{-x} + x \cdot v_2(x) e^{-x}$

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{-x} \cdot v_1'(x) + x e^{-x} v_2'(x) = 0 \\ -e^{-x} v_1'(x) + e^{-x} - x e^{-x} v_2'(x) = 3 \end{cases}$$

$$0 + \left(x e^{-x} + e^{-x} - x e^{-x}\right) v_2'(x) = 3 \Rightarrow v_2'(x) = \frac{3}{e^{-x}} = 3 e^{x} \Rightarrow v_2(x) = \int 3 e^{x} dx = 3e^{x} + C_2$$

$$\Rightarrow e^{-x} v_1'(x) + 3x e^{x} e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} v_1'(x) = -3x \Leftrightarrow v_1'(x) = \frac{-3x}{e^{-x}} = -3x e^{x} \Rightarrow$$

$$v_1(x) = \int -3x e^{x} dx = -3(e^{x} x - e^{x}) + C_1 = -3x e^{x} + 3e^{x} + C_1$$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{-x} + x C_2 e^{-x} + 3e^{x} + C_2 - 3x e^{x} + 3e^{x} + C_1} = (e^{-x} + 1) C_1 + (x e^{-x} + C_2) C_2 + 6e^{x} - 3x e^{x}$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -6$

$y'(0) = 1 \Rightarrow -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - x C_2 e^{-x} + 3e^{x} - 3e^{x} + 3x e^{x} + 3e^{x} \Rightarrow -C_1 + C_2 + 3 = 0$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -6 \\ -C_1 + C_2 = -3 \end{cases} \quad 2C_2 = -9 \Rightarrow C_2 = -\frac{9}{2} \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = (e^{-x} + 1)\left(-\frac{3}{2}\right) + (x e^{-x} + 1)\left(-\frac{9}{2}\right) + 6e^{x} - 3x e^{x}$$