TEMA 2: Cálculo de probabilidades

Contents

1 Introducción **2**

2 Probabilidad **4**

3 Combinatoria **5**

3.1 Variaciones (sin repetición) 6
3.2 Variaciones con repetición 6
3.3 Permutaciones (sin repetición) 6
3.4 Permutaciones con repetición 6
3.5 Combinaciones (sin repetición) 7
3.6 Combinaciones con repetición 7

4 Probabilidad condicionada e Independencia **7**

4.1 Probabilidad condicionada 7
4.2 Independencia 8

5 Regla del Producto **8**

6 Experimentos compuestos **8**

7 Teoremas fundamentales del Cálculo de Probabilidades **9**

7.1 Teorema de Probabilidades Totales 9
7.2 Teorema de Bayes 9

Universidade de Vigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 387 000
cotos@uvigo.es

1 Introducción

El **cálculo de probabilidades** nos suministra las reglas para el estudio de los experimentos aleatorios o de azar, constituyendo el soporte teórico para la Estadística. **Experimentos aleatorios y sucesos**

Se entiende por experimento un proceso mediante el cual se obtiene una observación. Se distinguen dos tipos de experimentos:

- Experimento determinista: aquel que repetido en idénticas condiciones, proporciona siempre el mismo resultado. Ejemplo: Leyes físicas.
- Experimento aleatorio: aquel que repetido varias veces en las mismas condiciones puede dar lugar a diferentes resultados conocidos previamente. Ejemplo: el número obtenido al lanzar un dado.

La Teoría de la Probabilidad estudia los *experimentos aleatorios*.

Definiciones previas:

- Suceso elemental o simple: cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Los denotamos por w.
- Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Lo denotamos por $\Omega = \{w \text{ tal que } w \text{ es un suceso elemental}\}$.
- Suceso: subconjunto del espacio muestral. Diremos que un suceso ocurre, cuando se presenta alguno de los posibles resultados que lo definen. Son sucesos de interés:
  - Suceso seguro: es aquel que siempre se verifica, Ω.
  - Suceso imposible: es aquel que nunca se verifica, suceso vacío, $\emptyset$.
  - Suceso complementario: se denomina suceso complementario de un suceso A, al que se verifica cuando no se verifica A, se suele denotar por $\overline{A}$ ó A^c. Ejemplo: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $A = "par" = \{2,4,6\}$ entonces $A^c = "impar" = \{1,3,5\}$.

Operaciones básicas con sucesos aleatorios:

Al considerar los sucesos aleatorios como subconjuntos del espacio muestral Ω, podemos aplicarles las conocidas operaciones con conjuntos, como son la unión, intersección y diferencia:

- Unión: Dados dos sucesos aleatorios A y B, se denomina *suceso unión* de A y B al conjunto formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a A o bien que pertenecen a B:

$$A \cup B = \{w \in \Omega \text{ tal que } w \in A \text{ ó } w \in B\}.$$

- Intersección: Dados dos sucesos aleatorios A y B, se denomina *suceso intersección* de A y B al conjunto formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a A y B a la vez:

$$A \cap B = \{w \in \Omega \text{ tal que } w \in A \text{ y } w \in B\}.$$

  Diremos que dos sucesos A y B son *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.

- Diferencia: Dados dos sucesos aleatorios A y B, se llama *suceso diferencia* de A y B, al suceso aleatorio formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a A pero no a B:

$$A \setminus B = A - B = \{w \in \Omega \text{ tal que } w \in A \text{ y } w \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

Universidade Vigo

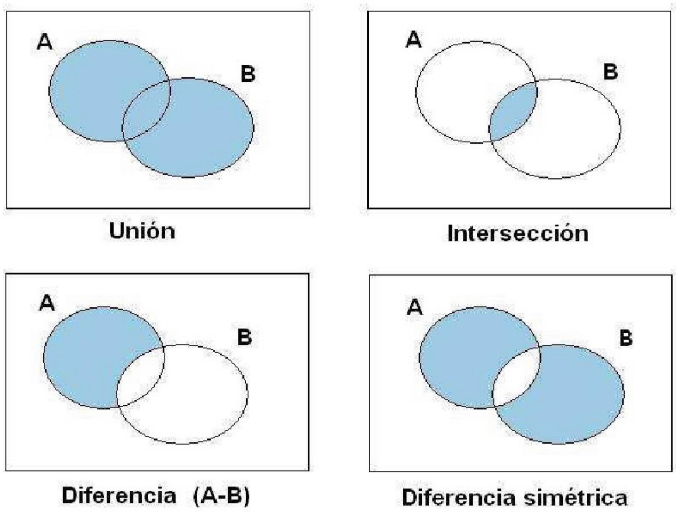
Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 387 000
cotos@uvigo.es

- Diferencia simétrica: Dados dos sucesos aleatorios A y B, se llama *suceso diferencia* simétrica de A y B, aquel que ocurre cuando sucede sólo A o sólo B:

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{w \in \Omega \text{ tal que } w \in A \text{ y } w \notin B\} \cup \{w \in \Omega \text{ tal que } w \notin A \text{ y } w \in B\} \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$



Propiedades:

- Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$ y $A \cup B = B \cup A$.
- Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- Distributiva: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ y $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- Elemento neutro: $A \cap \Omega = A$ y $A \cup \phi = A$.
- Leyes de De Morgan: $\overline{(A \cap B)} = (\overline{A} \cup \overline{B})$ y $\overline{(A \cup B)} = (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Álgebra de sucesos: Una colección **A** de subconjuntos de Ω, diremos que es un álgebra si verifica:

1. Si un suceso B $\in$**A** entonces B^c $\in$**A**.
2. Si dos sucesos B, C $\in$**A** entonces $B \cup C \in$ **A** [1].
3. ϕ $\in$**A**.

Esta definición implica además que: $\Omega \in$ **A** y si dos sucesos $B, C \in$ **A** entonces $B \cap C \in$ **A**.

[1] Por lo tanto la intersección de dos sucesos sucesos también está en la álgebra

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 387 000
cotos@uvigo.es

σ-Álgebra de sucesos: Una colección **A** de subconjuntos de Ω, diremos que es un σ-álgebra si verifica:

1. Si un suceso $B \in \mathbf{A}$ entonces $B^c \in \mathbf{A}$.
2. Si una colección de sucesos$\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbf{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathbf{A}$ [2].
3. $\phi \in \mathbf{A}$.

- La σ-algebra de sucesos más común usada para el espacio muestral discreto es la de $P(\Omega)$, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos posibles de Ω. El cardinal del conjunto es $\#P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$, con n el cardinal de Ω.
- Si el espacio es continuo y $\Omega = \Re$ entonces la $\mathbf{A} = \beta = \sigma - \{(a, b] \, / a < b, a, b \in \Re\}$[3], es decir, la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha (σ-álgebra de Borel).
- Si el espacio es continuo y $\Omega \subset \Re$ entonces, $\mathbf{A} = \beta \cap \Omega$, es decir, la σ-álgebra dada por los conjuntos intersección de la σ-álgebra de Borel con el Ω.
- De idéntica forma si el espacio continuo es en $\Re^n$, usando los 'intervalos' de $\Re^n$ abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha.

2 Probabilidad

La probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso podría definirse como la proporción de veces que ocurriría dicho suceso si se repitiese un experimento en un número grande de ocasiones bajo condiciones similares, es decir la probabilidad se obtendría como límite de la frecuencia relativa de ocurrencia de dicho suceso.

La definición anterior de probabilidad corresponde a la conocida como **definición frecuentista**. Existe otra descripción que permite definir el concepto de probabilidad mediante la verificación de ciertos axiomas:

Definición axiomática de Kolmogorov: Una probabilidad P sobre una σ-álgebra **A** es una aplicación

$$P : \mathbf{A} \to [0, 1]$$

verificando:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(B) \geq 0$.

[2]Por lo tanto la intersección de una colección numerable de sucesos también está en la σ-álgebra

[3]A esta σ-álgebra pertenecen, por ejemplo, los conjuntos formados por:

- Los puntos: $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right]$, y por lo tanto uniones finitas e infinitas numerables de ellos.
- Los intervalos abiertos: $(a, b) = (a, b] \cap \{b\}^c$.
- Los intervalos cerrados: $[a, b] = \{a\}^c \cup (a, b]$.

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 387 000
cotos@uvigo.es

3. Si una colección de sucesos $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbf{A}$, incompatibles dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$

A la terna $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ se le llama **espacio de probabilidades**.

Propiedades derivadas de los axiomas de Kolmogorov:

1. $P(\phi) = 0$.
2. Para cualquier suceso B, $0 \leq P(B) \leq 1$.
3. Si B y C son dos sucesos tales que $B \subseteq C$, entonces $P(B) \leq P(C)$.
4. $P(B^c) = 1 - P(B)$.
5. Si una colección de sucesos $\{B_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbf{A}$, incompatibles dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

6. $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.

Métodos de asignación de probabilidades:

- A partir de un estudio previo, identificando las probabilidades con las frecuencias relativas.
- En los espacios muestrales finitos a menudo se da el caso más simple, el de **equiprobabilidad**, en el que cada suceso elemental tiene la misma probabilidad. En este caso se puede calcular la probabilidad de un suceso cualquiera como el cociente entre el número de casos favorables entre el número de casos posibles, ésta es la llamada **Ley de Laplace.**

$$P(A) = \frac{\#\{Casos\ favorables\}}{\#\{Casos\ Posibles\}}$$

  Bajo la hipótesis de equiprobabilidad, el cálculo de probabilidad se reduce a la tarea de contar, con este propósito surge la **Combinatoria**, proporcionándonos técnicas para el recuento.

- **Probabilidad geométrica**: Una extensión de la Ley de Laplace al caso de experimentos donde el espacio muestral Ω es no numerable y la probabilidad es *al azar*, se puede calcular la probabilidad de un suceso A como $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$. Siendo m una determinada medida geométrica como la longitud, el área, el volumen, ...

3 Combinatoria

La combinatoria estudia las diferentes formas en que se pueden realizar la ordenación o agrupamiento de unos cuantos objetos siguiendo unas determinadas condiciones o reglas .

Número factorial : es el producto de n^o consecutivos naturales:

$$n! = (n) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \text{ (Asumimos } 0! = 1).$$

3.1 Variaciones (sin repetición)

Se llama variaciones de n elementos tomados de m en m ($m \leq n$) a los distintos grupos formados por m elementos de forma que los m elementos que forman el grupo son distintos (no se repiten).

Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (*influye el orden*).

$$V_{n,m} = V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-m+1).$$

Ejemplo 1. *Determinar el número de grupos que se pueden formar de 3 elementos tomados de 2 en 2.*
Sea el conjunto $\{1,2,3\}$, *el número de grupos es* $V_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$ *y son:*

$$\Omega_V = \{\{1,2\},\{2,1\},\{1,3\},\{3,1\},\{2,3\},\{3,2\}\}$$

3.2 Variaciones con repetición

Se llama variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m a los distintos grupos formados por n elementos de manera que los elementos que forman cada grupo pueden estar repetidos.

Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que estos están colocados (*influye el orden*).

$$VR_{n,m} = VR_n^m = n^m$$

Ejemplo 2. *Determinar el número de grupos que se pueden formar de 3 elementos tomados de 2 en 2 pudiéndose repetir.*
Sea el conjunto $\{1,2,3\}$, *el número de grupos es* $VR_3^2 = 3^2 = 9$ *y son:*

$$\Omega_{VR} = \Omega_V \cup \{\{1,1\},\{2,2\},\{3,3\}\}$$

3.3 Permutaciones (sin repetición)

Se llama permutaciones de n elementos a las diferentes agrupaciones de esos n elementos de forma que en cada grupo intervienen los n elementos sin repetirse ninguno (*intevienen todos los elementos*).

Dos grupos son diferentes si el orden de colocación de alguno de esos n elementos es distinto (*influye el orden*).

$$P_n = V_n^n = n!$$

Ejemplo 3. *Determinar el número de grupos que se pueden formar al permutar 3 elementos.*
Sea el conjunto $\{1,2,3\}$, *el número de grupos es* $P_3 = V_3^3 = 3! = 3.2.1 = 6$ *y son:*

$$\Omega_P = \{\{1,2,3\},\{1,3,2\},\{2,1,3\},\{2,3,1\},\{3,1,2\},\{3,2,1\}\}$$

3.4 Permutaciones con repetición

Se llama permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces , el segundo b veces , el tercero c … a los distintos qrupos que pueden formarse con esos n elementos de forma que intervienen todos los elementos y dos grupos se diferencian en el orden de colocación de alguno de sus elementos.

$$PR_n^{a,b,c\ldots} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \ldots}$$

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 387 000
cotos@uvigo.es

3.5 Combinaciones (sin repetición)

Se llama combinaciones de n elementos tomados de m en m ($m \leq n$) a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los n elementos de forma que cada agrupación está formada por m elementos distrintos entre si y dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, *sin tener en cuenta el orden*.

$$C_{n,m} = C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejemplo 4. *Determinar el número de grupos que se pueden formar de 3 elementos tomados de 2 en 2 si importar el orden.*
Sea el conjunto $\{1,2,3\}$*, el número de grupos es* $C_3^2 = \binom{3}{2} = 3$ *y son:*

$$\Omega_C = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

3.6 Combinaciones con repetición

Se llama combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m, a los distintos grupos formados por m elementos de manera que los elementos que forman cada grupo pueden estar repetidos y dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, *sin tener en cuenta el orden*.

$$CR_{n,m} = CR_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Ejemplo 5. *Determinar el número de grupos que se pueden formar de 3 elementos tomados de 2 en 2 si importar el orden y repitiéndose.*
Sea el conjunto $\{1,2,3\}$*, el número de grupos es* $CR_3^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ *y son:*

$$\Omega_{CR} = \Omega_C \cup \{\{1,1\},\{2,2\},\{3,3\}\}$$

4 Probabilidad condicionada e Independencia

Supongamos que lanzamos un dado, la probabilidad de obtener un 3 es de $\frac{1}{6}$, pero si sabemos que ha salido impar, la probabilidad de obtener un tres pasa a ser $\frac{1}{3}$. Vemos pues, que la presencia de información a priori puede cambiar el espacio muestral y también las probabilidades.

4.1 Probabilidad condicionada

Dados dos sucesos B y C (con $P(C) > 0$), definimos la **probabilidad condicionada** de B a C como:

$$P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}.$$

Como consecuencia de la definición se puede ver

$$P(B \cap C) = P(B/C) \cdot P(C).$$

Si definimos la aplicación $P_C : A \to [0,1]$ donde:

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 387 000
cotos@uvigo.es

$$P_C(B) = P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

Esta aplicación así definida es una **probabilidad**, de esta forma las propiedades que antes vimos para la Probabilidad se pueden aplicar en el caso de Probabilidad condicionada y por tanto:

- $P(B^c/C) = 1 - P(B/C)$
- Dados A, B sucesos incompatibles, $P((A \cup B)/C) = P(A/C) + P(B/C)$.

4.2 Independencia

Dos sucesos B y C se dice que son independientes si la ocurrencia o no de uno no influye en la ocurrencia o no del otro, es decir: $P(B/C) = P(B)$, o lo que es lo mismo $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$.

NOTA: Si B y C son disjuntos ($B \cap C = \emptyset$) y $P(B) > 0$ y $P(C) > 0$, entonces B y C no son independientes.

Sucesos mutuamente independientes

Los sucesos $\{B_i\}_{i=1}^n \in \mathbf{A}$, son mutuamente independientes si dados un conjunto de índices $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n$, se verifica que:

$$P\left(\bigcap_{j=i_1}^{i_k} B_j\right) = \prod_{j=i_1}^{i_k} P(B_j)$$

NOTA: Independencia dos a dos ($P(B_i \cap B_j) = P(B_i)P(B_j), i \neq j$) no implica sucesos mutuamente independientes.

5 Regla del Producto

Sean $\{B_i\}_{i=1}^n \in \mathbf{A}$, sucesos tales que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) > 0$. Entonces:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap B_2) \cdot \ldots \cdot P\left(B_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right)$$

6 Experimentos compuestos

Un **experimento compuesto** es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples. Por ejemplo, dado el experimento ξ representado por su espacio de probabilidades $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ para cada suceso $w \in \mathbf{A}$ tenemos el experimento asociado ξ_w con su espacio de probabilidades $(\Omega_w, \mathbf{A}_w, P_w)$

En los experimentos compuestos discretos es comodo usar el llamado *diagrama de árbol* para hacerse una idea global de los experimentos simples. En su construcción, cada rama del árbol se corresponde con cada uno de los sucesos y se acompañada de su probabilidad.

De especial importancia son los experimentos compuestos por repeticiones de n experimentos simples. En donde, el espacio de probabilidades resultante $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{P})$ puede reescribirse como: $\tilde{\Omega} = \Omega^n$, $\tilde{\mathbf{A}} = \sigma-$álgebra generada por $\mathbf{A}^n$ y $\tilde{P} = P^n$.

Universidade Vigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 387 000
cotos@uvigo.es

Ejemplo: Lanzamiento de una moneda dos veces.
$\tilde{\Omega} = \Omega^2 = \{c_1c_2, c_1+_2, +_1c_2, +_1+_2\}$, donde $c_1c_2 = (c_1, c_2), \ldots$.
$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \{\emptyset$, las 4 combinaciones formadas por un elemento $= \{c_1c_2, c_1+_2, +_1c_2, +_1+_2\}$, las 6 combinaciones formadas por dos elementos, las 4 combinaciones formadas por 3 elementos, $\Omega^2\}$, y
$\tilde{P} = P^2$.

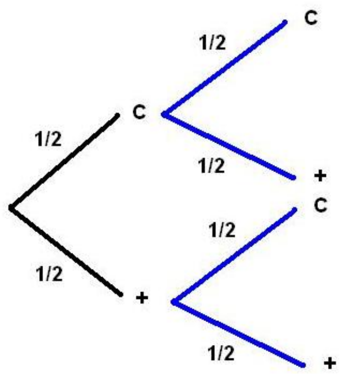


Diagrama de árbol del lanzamiento de una moneda dos veces.

Calcular:

$$P(c_1c_2) = P(c_1 \cap c_2) = P(c_1)P(c_2|c_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}$$
$$\text{Probabilidades totales: } P(c_2) = P(c_2|c_1)P(c_1) + P(c_2|+_1)P(+_1)$$
$$\text{Regla de Bayes: } P(c_1|c_2) = \frac{P(c_2|c_1)P(c_1)}{P(c_2|c_1)P(c_1) + P(c_2|+_1)P(+_1)}$$

7 Teoremas fundamentales del Cálculo de Probabilidades

7.1 Teorema de Probabilidades Totales

Sean $\{B_i\}_{i=1}^n \in \mathbf{A}$, un conjunto de sucesos tales que $P(B_i) > 0$, incompatibles dos a dos y $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$, entonces para cualquier suceso C, se verifica que:

$$P(C) = \sum_{i=1}^n P(C/B_i) \cdot P(B_i).$$

(Se puede pensar en C como un suceso que puede ocurrir de diferentes maneras $\{B_i\}_{i=1}^n$)

7.2 Teorema de Bayes

Sean $\{B_i\}_{i=1}^n \in \mathbf{A}$, un conjunto de sucesos verificando: $P(B_i) > 0$, que los sucesos son incompatibles dos a dos y $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$, entonces para cualquier suceso C tal que $P(C) > 0$ y cualquier índice j, se verifica que:

$$P(B_j/C) = \frac{P(C/B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(C/B_i) \cdot P(B_i)}.$$

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 387 000
cotos@uvigo.es

(Se puede pensar en C como un efecto de diferentes causas $\{B_i\}_{i=1}^n$. Por ejemplo una enfermedad provocada por diferentes virus. Si conocemos la probabilidad de que el virus i provoque la enfermedad ($P(C/B_i)$) para cada $i = 1, \ldots, n$, nos puede interesar saber la probabilidad de que si una persona presenta la enfermedad, que ésta haya sido provocada por el virus j ($P(B_j/C)$)).