Universidad de Vigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 368 766
cotos@uvigo.es

Boletín de Cálculo de Probabilidades

OPERACIONES CON SUCESOS

1. Sean tres sucesos cualesquiera A, B, C de un experimento aleatorio. Expresa los siguientes sucesos, en función de A, B, C:

a) Solamente ocurre A.	b) Ocurren tanto A, como B, pero no C	c) Ocurren los tres sucesos.
d) Ocurre por lo menos uno.	e) Por lo menos ocurren dos	f) Ocurre a lo sumo uno.
g) Ocurren dos y no más.	h) No ocurre ninguno.	i) No ocurren más de dos

2. Se observa el tiempo de ejecución de un programa. Si se consideran los sucesos A =*tarda en ejecutarse más de 10 segundos* y B = *tarda en ejecutarse entre 5 y 15 segundos*. Expresa los siguientes sucesos: $A \cup B, A \cap B, \bar{A}, \bar{B}, A \setminus B, B \setminus A, A \bigtriangledown B, \bar{A} \cap \bar{B}$.

3. Supóngase que A y B son sucesos tales que $P(A) = P(B) = 1/4$ y $P(A \backslash B) = 1/8$. Calcula la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los dos sucesos.
Además, si C es un suceso tal que $P(C) = 1/2$ y $P(A \backslash C) = P(B \backslash C) = 0$. Calcula la probabilidad de que al menos uno de los sucesos A, B ó C ocurra.

4. Sean A, B y C tres sucesos independientes, con $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$. Calcula las siguientes probabilidades: $P(B \cup C)$, $P(\bar{A} \cap (B \cup C))$ y $P(A \cup B \cup C)$.

5. Sean A y B dos sucesos, demostrar que si $P(A) = 0$ o $P(B) = 0$ entonces A y B son independientes.

6. Demostrar que si A y B son dos sucesos independientes, entonces también lo son $\bar{A}$ y B y por lo tanto también A y $\bar{B}$.

7. Dados: $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ y $P(\overline{A \cup B}) = 0.3$, ¿son A y B independientes?

8. Dado que $P(A \cap \bar{B}) = 0.3, P(\bar{A} \cap B) = 0.2$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1$. ¿Son A y B independientes?

COMBINATORIA

1. En una clase de 50 asientos, los 39 alumnos se sientan al azar. Responder:

   (a) Probabilidad de cada una de las configuraciones de sillas ocupadas.

   Proof.

$$P(\text{sillas ocupadas}) = \frac{1}{C_{50}^{39}} = \frac{1}{choose(50, 39)} = 2.677108e - 11$$

□

   (b) Probabilidad de cada configuración de alumnos en la clase.

   Proof.

$$P(\text{alumnos en sillas}) = \frac{1}{V_{50}^{39}} = \frac{1}{50!/(50-39)!} = \frac{11!}{50!} = 1/prod(12:50) = 1.312444e - 57$$

□

UniversidadeVigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 368 766
cotos@uvigo.es

2. En el lanzamiento de 5 dados equilibrados,
   (a) ¿cuál es la probabilidad de que salga el mismo lado en el lanzamiento de los 5 dados?
   (b) ¿cuál es la probabilidad de que salgan los 5 lados distintos?
   (c) ¿cuál es la probabilidad de que salgan exactamente 3 lados con el 6 o exactamente 2 lados con el 5?

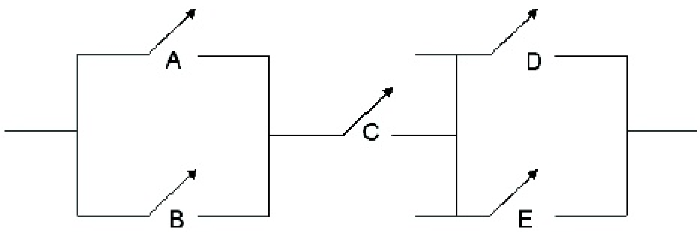
3. *Problema del cumpleaños*. Dado un año de 365 días, ¿cuál es la probabilidad de que en un grupo de k personas al menos coincidan dos con el mísmo día de cumpleaños?

4. En el juego de la Primitiva (6 números de 49 posibles), calcular las siguientes probabilidades:
   - de 6 aciertos
   - de 5 aciertos + el número complementario
   - de 5 aciertos
   - de 4 aciertos
   - de 3 aciertos

CALCULO DE PROBABILIDADES

1. Consideremos un sistema electrónico que consta de diez componentes que funcionan independientemente teniendo cada uno una probabilidad de fallo de 0.05.
   (a) Calcula la fiabilidad del sistema (probabilidad de que el sistema funcione correctamente).
   (b) Si para aumentar la fiabilidad del sistema, se conectan en paralelo dos sistemas iguales al descrito, calcula la fiabilidad del nuevo sistema.

2. Calcula la fiabilidad del sistema representado, sabiendo que las probabilidades de fallo de las componentes A, B, C, D y E son 0.10; 0.20; 0.20; 0.10 y 0.05 respectivamente, y que éstas funcionan de forma independiente



3. (Código corrector de errores pre-hamming *http://es.wikipedia.org/wiki/Código_Hamming*) Una técnica para corregir errores de transmisión de bits consistía en repetir cada bit de datos un número impar de veces para asegurarse de que la transmisión era correcta. Por ejemplo, si el bit de datos que se envía fuera un 1, un código de repetición con $n = 3$, enviaría "111". Si los tres bits recibidos no eran idénticos, había un error. En un ambiente sin demasiado ruido, la mayoría de las veces solamente cambiaría un bit en cada paquete de tres bits. Por lo tanto, datos del tipo

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 368 766
cotos@uvigo.es

001, 010, y 100 se corresponden al bit 0, mientras que 110, 101, y 011 se corresponden con el bit 1. Es como si el bit original se obtuviera por mayoría en una "votación". Un código con esta capacidad de reconstruir el mensaje original en la presencia de errores se conoce como código corrector de errores. Si el error en la transmisión es independiente del bit anterior enviado e independiente del bit posterior a enviar, $P(\text{recibir } 1/\text{envió } 0) = P(\text{recibir } 0/\text{envió } 1) = 0.01$ y $n = 3$:

(a) ¿Calcular la probabilidad de que el sistema determine un 0 cuando se envía un 0? y ¿que se determine un 1 cuando se envíe un 1?.

(b) ¿Calcular la probabilidad de que el sistema determine un 1 cuando se envía un 0? y ¿que se determine un 0 cuando se envíe un 1?.

(c) Si hay equiprobabilidad en el envío de bits 0 y 1, ¿cuál es la probabilidad de enviar un bit y que se determine correctamente?, y ¿la probabilidad de determinarlo incorrectamente?

4. Añadiendo 3 bits extra a una palabra de 4 bits en una forma particular (un código de Hamming) se consigue detectar y corregir hasta un error que se produzca en cualquiera de los 7 bits. Si cada bit tiene una probabilidad de 0.05 de ser cambiado durante transmisión, y los bits son cambiados independientemente unos de otros, ¿cuál es la probabilidad de que una palabra se reciba correctamente (es decir, que 0 ó 1 bits estén equivocados)?
Compara esta probabilidad con la de que la palabra se transmita correctamente si no hay comprobación extra, es decir, si los 4 bits tienen que transmitirse correctamente para que la palabra sea correcta (sin usar un código Hamming).

5. El bit de paridad . Supongamos que queremos transmitir un caracter. El código ASCII le asigna a cada caracter un número de manera tal que sólo debemos preocuparnos por cómo enviar números. Si, por ejemplo, para transmitir números utilizamos 7 bits, el número 5 lo representamos como 0000101. Para disminuir la probabilidad de errores se le agrega a este conjunto de 7 bits un nuevo bit denominado bit de paridad. Este nuevo bit toma el valor 0 ó 1 de forma tal que el conjunto de 8 bits tenga una cantidad par de unos. Si queremos transmitir el número 5, como su representación tiene una cantidad par de unos el bit de paridad vale 0 y por lo tanto se envía 00001010. El número 93 se representa como 1011101 (1(26) + 0(25) + 1(24) + 1(23)+1(22)+0(21)+1(20)). Como tiene una cantidad impar de unos, el bit de paridad vale 1 y se envía 10111011. De esta forma, siempre que se recibe un conjunto de 8 bits se sabe que los primeros 7 contienen la información y que el total de unos recibidos debe ser par. Si la cantidad de unos recibidos es impar sabemos que hubo un error en la transmisión. Supongamos que las transmisiones de los diferentes bits actúan en forma independiente y que la probabilidad de que un bit sea enviado incorrectamente es p. Consideremos el experimento de enviar un caracter y llamemos X = cantidad de bits con error.

(a) Si no se usa el bit de paridad (solo se envían 7 bits), ¿describe el espacio de prbabilidad de X?, ¿Cuál es la probabilidad de que el caracter sea enviado en forma errónea?

(b) Si se usa el bit de paridad, ¿cuál es la probabilidad de que el caracter sea enviado en forma errónea (sin importar si esto es detectado o no)?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el caracter sea enviado en forma errónea y esto no sea detectado (es decir que la cantidad de unos sea par)? Comparar esta probabilidad con la del ítem (a) para $p = 0.01$.

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 368 766
cotos@uvigo.es

6. Se desea saber qué porcentaje de los alumnos que han aprobado el último examen de Introducción a la Estadística lo han hecho de forma fraudulenta (chuletas en todas sus variantes). Para ello disponemos de la siguiente información:
   (a) Se estima que, de utilizar chuletas, la probabilidad de aprobar es de 0.9, mientras que, sin este apoyo, esta probabilidad desciende sensiblemente hasta 0.3.
   (b) Por otro lado, es conocido por todos que el 10 % de los universitarios llevan chuletas a los exámenes.

7. Antes de salir para la facultad, un estudiante decide si lleva o no paraguas según el siguiente criterio: si en el momento de salir está lloviendo, llevará paraguas con una probabilidad de 0.9; si no está lloviendo, lo dejará en casa con una probabilidad de 0.6. Sabiendo que llueve el 75% de los días, determina:
   (a) Probabilidad de que se moje.
   (b) Probabilidad de que llueva, sabiendo que ha llevado paraguas.

8. Se lanza un dado trucado, en el que la probabilidad de obtener un resultado par es el triple que la probabilidad de obtener un resultado impar. Si el resultado es par, se extrae una bola de la urna 1 compuesta por 5 bolas rojas y 7 negras. Si el resultado es impar, se extrae una bola de la urna 2, compuesta por 3 bolas rojas y 6 negras. Calcula:
   (a) Probabilidad de que la bola extraída sea roja.
   (b) Si la bola extraída es negra, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del lanzamiento del dado haya sido un número impar?

9. Una caja A contiene 9 cartas numeradas del 1 al 9 y otra caja B contiene 5 cartas numeradas del 1 al 5. Se elige una caja al azar y se toma una carta, si está numerada con un número par se toma otra carta de la misma caja, y si está numerada con un número impar se toma una carta de la otra caja. Calcular:
   (a) Probabilidad de que ambas cartas estén numeradas con números impares.
   (b) Si ambas cartas tienen números pares, probabilidad de que sean de la caja A.

10. Cuatro caminos conducen fuera de una cárcel. Un prisionero ha escapado de la cárcel y escoge un camino aleatoriamente. Si escoge el camino 1, la probabilidad de que escape con éxito es $\frac{1}{8}$. Si escoge el camino 2 escapará con probabilidad $\frac{1}{6}$, si escoge el camino 3 con probabilidad $\frac{1}{4}$ y con el camino 4 la probabilidad es $\frac{9}{10}$. Se pide:
    (a) Calcular la probabilidad de que el prisionero tenga éxito en su huida.
    (b) Si el prisionero tiene éxito en su huida, ¿cuál es la probabilidad de que hubiera escogido el camino 4?

11. En un departamento de polícia de una determinada ciudad el porcentaje de oficiales hombres es del 75%. Además se sabe que entre los oficiales hombres, el 25% fueron ascendidos el año pasado y que el porcentaje total de ascensos fue del 30%.
    (a) Las mujeres sospechaban que había discriminación a la hora de conceder los ascensos, ya que el porcentaje de ascensos entre ellas parecía menor. El departamento se disculpó alegando que el número de mujeres también era inferior. ¿Tienen razones las mujeres a la hora de presentar una demanda por discriminación?

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 368 766
cotos@uvigo.es

(b) Si seleccionamos un oficial al azar ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre o haya sido ascendido?

(c) Si seleccionamos un oficial que ha sido ascendido ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? ¿Es independiente el sexo de la posibilidad de ascenso?

12. Los alumnos de una asignatura de Estadística tienen que realizar dos pruebas, una teórica y otra práctica. La probabilidad de que un estudiante apruebe la parte teórica es de 0.6, la probabilidad de que apruebe la parte práctica es de 0.8 y la probabilidad de que apruebe ambas pruebas es 0.5.

    (a) ¿Son independientes los sucesos aprobar la parte teórica y la parte práctica? ¿Son incompatibles?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno no apruebe ninguno de los dos exámenes?

    (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe solamente uno de los dos exámenes?

    (d) Se sabe que un alumno aprobó la teoría. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe también la práctica?

13. Tras un estudio estadístico en una ciudad se observa que el 70% de los motoristas son varones y, de estos, el 60% lleva habitualmente casco. Por otro lado el porcentaje de mujeres motoristas y que utilizan casco es del 12%. Se pide:

    (a) Calcular la probabilidad de que un motorista elegido al azar lleve casco.

    (b) Se elige un motorista al azar y se observa que no lleva casco. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un varón?

    (c) ¿Es independiente el sexo del motorista del hecho de llevar casco?¿e incompatible? Razona tu respuesta.

14. El propietario de una tienda de discos clasifica a las personas que entran en su tienda en tres categorías: clientes muy jóvenes, clientes con edad universitaria y clientes mayores, y sabe que el 30%, 50% y 20% pertenecen a esta categoría, respectivamente. El propietario comprueba también que el 20 % de los clientes muy jóvenes, el 60% de los clientes con edad universitaria y el 80% de los clientes mayores, realizan alguna compra.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar realice alguna compra?

    (b) Si un cliente elegido al azar realiza una compra, ¿cuál es la probabilidad de que sea muy joven?

    (c) Si un cliente elegido al azar hace una compra, ¿cuál es la probabilidad de que no sea muy joven?

15. Para analizar la influencia que los padres fumadores tienen sobre el hábito de fumar de sus hijos, se ha realizado un estudio sobre los estudiantes de cierta universidad. A partir de los resultados obtenidos se estima que la probabilidad de que un estudiante fume si lo hace alguno de sus padres es dos veces mayor que si ninguno de los dos lo hace. Además, se encuentra que el 25 % de los estudiantes fuman y que tres de cada cuatro tienen algún progenitor fumador. Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar:

    (a) Fume si no lo hace ninguno de sus padres.

    (b) Tenga algún progenitor fumador si él mismo no lo es.

Departamento de Estatística e Investigación Operativa
Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense
Tel. 988 368 766
cotos@uvigo.es

16. En una caja hay seis bombillas, de las cuales dos son defectuosas. Si las bombillas son probadas hasta encontrar una defectuosa, describe el espacio muestral del experimento.

17. Recientemente ha aparecido en la prensa la noticia de que el 80 % de los accidentes de circulación ocurren en recorridos cortos. Preocupados por si realizar un recorrido corto era más peligroso que uno largo, conseguimos la información de que el 90 % de los recorridos que se realizan son cortos. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

    (a) ¿Es más peligroso realizar un recorrido corto o uno largo?

    (b) ¿Qué porcentaje de trayectos cortos debería haber para que fuese independiente sufrir un accidente del tipo de recorrido?

18. Un taller clasifica las averías dentro de 3 grupos: problemas de chapa, mecánicos y eléctricos. Se ha observado que el 20% de las reparaciones son por problemas de chapa y que el 75% de los vehículos con problemas de chapa acuden al taller por la mañana. Además el 15% presentan problemas eléctricos y van al taller por la mañana, y el 40% tienen problemas mecánicos y acuden por la mañana. Calcula:

    (a) ¿Qué porcentaje de vehículos se atienden por la mañana en este taller?

    (b) Si un vehículo llega al taller por la mañana ¿Cuál es la probabilidad de que presente un problema eléctrico?

    (c) Si un vehículo llega al taller por la tarde ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga problemas de chapa?

    (d) ¿Es independiente la hora de llegada al taller con presentar problemas de chapa?

19. Por un estudio encargado por un partido político se sabe que: el 17% de la población tiene estudios superiores, el 44% estudios medios, el 30% estudios primarios y el 9% no tiene estudios. De los que tienen estudios superiores, el 25% votan a ese partido político, de los que tienen estudios medios el 35%, de los que tienen estudios primarios el 22% y entre los que no tienen estudios el 18%.

    (a) Determina los sucesos y escribe las probabilidades que nos dan en el enunciado.

    (b) Calcula la probabilidad de que tenga estudios superiores sabiendo que vota al partido político.

    (c) Calcula la probabilidad de que sea una persona sin estudios y vote a ese partido político.

    (d) Calcula la probabilidad de que sea una persona con estudios primarios o que no vote a ese partido político.

20. Disponemos de tres urnas (U_1, U_2 y U_3) de forma que U_1 tiene 5 bolas blancas y 5 bolas negras, U_2 tiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras y U_3 tiene 7 bolas blancas y 3 bolas negras. Seleccionamos una urna al azar y extraemos una bola sin reemplazamiento (sin reemplazamiento significa que no la vuelvo a meter en la urna). Calcula:

    (a) Probabilidad de que la bola sea blanca y proceda de U_2 (la urna 2).

    (b) Probabilidad de que la bola sea blanca.

    (c) Probabilidad de que la bola proceda de la urna 3 si es negra.

    (d) Supongamos que realizamos otra extracción de la misma urna. Calcula la probabilidad de que la segunda bola sea negra.

Universida de Vigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Grao en Enxeñaría Informática
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 988 368 766
cotos@uvigo.es

EJERCICIOS GENERALES DE PROBABILIDADES

1. Entre los docentes de una Escuela de Ingeniería se ha observado que el 20% imparte clase en 1^o y que 40% son mujeres. Además, entre las mujeres, el 25% se seleccionan para la orla de fin de curso y entre todos los docentes de 1^o, el 20% son escogidos para aparecer en la orla. Finalmente, el 40% de los docentes de 1^o son mujeres. Calcula la probabilidad de que:
   (a) seleccionado un docente al azar, sea una mujer y haya sido escogida para la orla.
   (b) un profesor elegido al azar sea un hombre o imparta clases en 1^o.
   (c) si seleccionamos una profesora, ésta imparta clases en 1^o.

2. Una empresa consulta a sus clientes sobre un nuevo producto que tiene intención de lanzar al mercado. El producto tiene buena acogida por parte del 65% de los clientes nacionales y por el 40% del mercado masculino. Además, el 50% de los clientes son nacionales y el 70% de todos los clientes son hombres. Finalmente, el 80% de los clientes nacionales son hombres. Define los sucesos y plantea las probabilidades dadas en el enunciado.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea un hombre o un cliente nacional?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea un hombre y al que le gusta el nuevo producto?
   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que seleccionado un cliente femenino, éste sea un cliente nacional?

3. En una empresa informática se sabe por experiencias pasadas que la probabilidad de fallo en una fuente de alimentación es de 0.02. Si la probabilidad de que un control diagnostique un fallo en una fuente defectuosa es de 0.78 y la de que lo diagnostique a una fuente sin fallo es de 0.06, ¿cuál es la probabilidad de que a una fuente se le diagnostique fallo?. ¿Cuál es la probabilidad de que a una fuente a la que se le diagnostica fallo, tenga el fallo verdaderamente?

4. Moon Systems, fabricante de estaciones de trabajo, produce su "Sistema Modelo X" en tres sitios diferentes A, B y C: un 20% en A, un 35% en B y el resto en C. La probabilidad de que un "Sistema Modelo X" esté defectuoso cuando lo recibe el cliente es 0.01, si procede de A, 0.06, si procede de B y 0.03, si proviene de de C.
   (a) Calcula la probabilidad de que un "Sistema Modelo X" seleccionado al azar esté defectuoso en el momento de la entrega al cliente.
   (b) Supongamos que un "Sistema Modelo X" seleccionado al azar ha resultado estar defectuoso en el momento de la entrega al cliente. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en el lugar B?.

5. Una empresa tiene tres formas diferentes de enviar un mensaje que denominamos A, B y C. Los mensajes enviados por cualquiera de los métodos pueden llegar correctamente, llegar con errores o no llegar. Los porcentajes con que ocurren cada uno de los sucesos anteriores cuando se utiliza A son 85%, 5% y 10%, respectivamente; del 90%, 5% y 5% con B y del 80%, 0% y 20% si la forma utilizada es la C. Si las formas de envío son equiprobables, calcula las siguientes probabilidades:
   (a) Probabilidad de que un mensaje sea recibido correctamente.

(b) Probabilidad de que un mensaje sea recibido si se utilizó A ó B.

(c) Si el mensaje no llegó, la probabilidad de haber sido enviado por A.

6. Dos amigos (Alejandro y Federico) pasan de lunes a viernes jugando al NetHack en solitario. El sábado se conectan por Internet y se enfrentan en una partida. Alejandro se considera satisfecho si por semana consigue descender cinco niveles de NetHack, lo que sucede con probabilidad 0′3. Si está satisfecho, la probabilidad de que gane el sábado la partida es 0′7, y la probabilidad de tablas es 0′1. Si no está satisfecho, la probabilidad de que gane el sábado es P y la probabilidad de tablas es 0′4.

   (a) Sabiendo que la probabilidad de que Federico gane el sábado es 0′3, ¿cuánto vale P?

   (b) Alejandro gana el sábado, ¿cuál es la probabilidad de que por semana haya descendido los cinco niveles?

7. En un grupo de personas, el 50% han realizado en alguna ocasión compras por internet. Por otro lado, el 12,5% no han realizado nunca compras por internet pero si han participado en algun un chat. Finalmente, el 60% de los que nunca han entrado en un chat no han realizado nunca compras por internet.

   (a) ¿Qué porcentaje no han realizado nunca compras por internet ni han participado en un chat?

   (b) ¿Qué porcentaje no han participado nunca en un chat?

   (c) Entre las personas que no han realizado compras por internet, ¿qué porcentaje no han participado nunca en un chat?

8. De los asistentes a una sesión doble de cine, se sabe que al 70% le ha gustado la primera película; al 30% le ha gustado la primera pero no la segunda y al 20% le ha gustado la segunda pero no la primera. Seleccionada una persona a la salida del cine al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

   (a) Le ha gustado sólo una de las películas.

   (b) Le han gustado las dos películas.

   (c) No le ha gustado ninguna de las películas.

   (d) No le ha gustado al menos una de las películas.

   (e) No le ha gustado la segunda si se sabe que la primera no le gustó.

9. Un sistema de computación en-línea tiene 4 líneas de entrada. Cada línea cubre un porcentaje de tráfico de entrada y cada línea tiene un % de mensajes con errores. La tabla siguiente describe estos porcentajes.

Línea	% mens. por línea	% mens. sin error
1	40	99.8
2	30	99.9
3	10	99.7
4	20	99.2

   Si un mensaje se recibió erróneamente, ¿cuál es la probabilidad de que entrara por la línea 1?